情報数理セミナー 9/18 @日本大学

The rationality problem for multinorm one tri. (金井 @ 呉高専)

§1 Norm one tri and multinorm one tri

K/k : fin. separable ext. of field

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[d, dash] \arrow[d, bend right, dashed, dash, "H := \mathrm{Gal}(L/K)"'] \arrow[dd, bend left, dashed, dash, "G := \mathrm{Gal}(L/k)"] & \leftarrow \text{Galois closure} \\
K \arrow[d, dash] \arrow[d, bend right, dashed, dash, "n"'] & \\
k &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{rccc}
N_{K/k} : & K^\times & \longrightarrow & k^\times \\
& \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
& a & \longmapsto & \prod\limits_{\sigma : K \hookrightarrow \bar{k}} \sigma(a)
\end{array}$$

Weil restriction : k-alg R に対して $(R \otimes_k K)^\times$ する functor.

この設定で

$$1 \longrightarrow \underset{\substack{\shortparallel \\ \ker(N_{K/k})}}{T_{K/k}} \longrightarrow \mathrm{Res}_{K/k}(\mathbb{G}_{m,k}) \xrightarrow{N_{K/k}} \underset{\substack{\shortparallel \\ k^\times}}{\mathbb{G}_{m,k}} \longrightarrow 1$$

$\ker(N_{K/k})$: Norm one torus

$\mathrm{Res}_{K/k}(\mathbb{G}_{m,k}) \underset{=}{\times_k} K$ で split
ファイバー積

T : alg. torus $/k \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} T \otimes_k \bar{k} \simeq (\mathbb{G}_{m,\bar{k}})^n$

Example :

$k := \mathbb{Q}$, $K := \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ とすれば, $\mathrm{Res}_{K/k}(\mathbb{G}_{m,k})(R) = (R \otimes_k K)^\times = \left(R[t]/(t^2-d)\right)^\times$ となる.

ここに, R は任意の k-代数. $\alpha := x + \sqrt{d}y$ に対して, $N_{K/k}(\alpha) = (x+\sqrt{d}y)(x-\sqrt{d}y) = x^2 - dy^2$ より

$T_{K/k} \simeq \{ x + yt \mid x^2 - dy^2 = 1,\ x, y \in R \}$ //

ここまでの話は, すべて $\mathbb{K} := \prod_{i=1}^{r} K_i$ (fin. étale alg$/k$) でもうごく.

※ これは

$$N_{K_1/k}(\alpha)\, N_{K_2/k}(\alpha) \cdots N_{K_r/k}(\alpha) = 1$$

を考えることに相当.

以下, L は $K_1 \cdots K_r$ の Galois closure とする.

§ G-lattice

一般に

($\exists L/k$: fin Gal. ext で $G := \mathrm{Gal}(L/k)$)

(G-作用つきの $\mathbb{Z}$-free module. たとえば, $\mathbb{Z}[G]$ とか…)

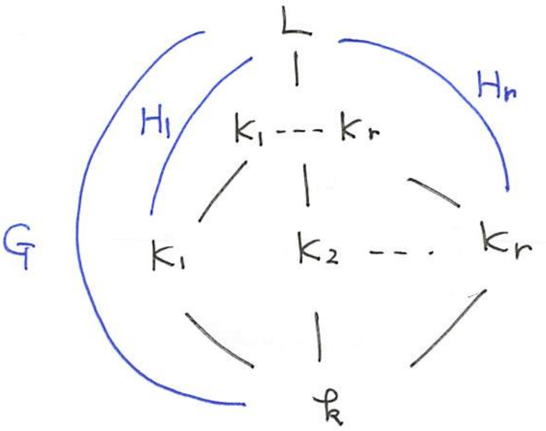
$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Cat. of alg. tori}\\ \text{which split } /L.\end{array}} \xleftrightarrow{\text{dual}} \boxed{\begin{array}{l}\text{Cat. of}\\ \text{G-lattice}\end{array}}$$

$$T \longmapsto \mathrm{Hom}_{k^{sep}\text{-group}}(T \times_k k^{sep}, \mathbb{G}_{m,k^{sep}}) =: \underline{X^*(T)}$$

Character group.

$T_{\mathbb{K}/k}$ に対応する G-lattice は以下のものになる.

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{(\mathring{\varepsilon}_{G/H})_{H\in\mathcal{H}}} \bigoplus_{H\in\mathcal{H}} \mathbb{Z}[G/H] \longrightarrow \underbrace{X^*(T_{\mathbb{K}/k})}_{\rotatebox{90}{$\cong$}\ J_{G/\mathcal{H}}} \longrightarrow 0 \quad (\text{ex. as G-mod})$$



- $G := \mathrm{Gal}(L/k)$
- $\mathcal{H} := \{ \mathrm{Gal}(L/K_i) \mid i = 1, 2, \dots, r \}$
- $J^{\circ}_{G/\mathcal{H}} =: J_{G/\mathcal{H}}$

ただし,
$$\mathring{\varepsilon}_{G/H_i} : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}[G/H_i]$$
$$1 \longmapsto \sum_{g\in G/H_i} g$$

§ $I^{(\varphi)}_{G/\mathcal{H}}$ and $J^{(\varphi)}_{G/\mathcal{H}}$

$J_{G/\mathcal{H}}$ の構成では, $\mathcal{H}$: multi set となるが, 重複を取り除いた $\mathcal{H}^{set}$ が本質的なはず.
$H \in \mathcal{H}^{set}$ に対して, 重複度を $m_{\mathcal{H}}(H)$ とかく.

Definition

$$\Delta_m := \{ (d_1, \dots, d_m) \in (\mathbb{Z}_{>0})^m \mid d_1 \le \dots \le d_m \}$$
$$\Delta := \bigsqcup_{m\in\mathbb{Z}_{>0}} \Delta_m$$

とする.

($d \in \Delta_m$ のとき, d_i は d の i 番目の成分とする.)

(i) $\varphi : \mathcal{H}^{set} \longrightarrow \Delta$ が $\varphi(H) \in \Delta_{m_{\mathcal{H}}(H)}$ をみたすとき φ を Weight function on $\mathcal{H}$ と呼ぶ.

(ii) φ: weight function に対して

$$\begin{aligned} d_\varphi : \mathcal{H}^{set} &\longrightarrow \Delta_1 \\ H &\longmapsto \gcd(\varphi(H)_1, \cdots, \varphi(H)_{m_{\mathcal{H}}(H)}) \end{aligned}$$

特に $\gcd(d_\varphi(H) \mid H \in \mathcal{H}^{set}) = 1$ のとき, d_φ を normalized と呼ぶ.

Lemma 1

φ: weight funct. on $\mathcal{H}$

$$\begin{aligned} \varphi^{nor} : \mathcal{H}^{set} &\longrightarrow \Delta \\ H &\longmapsto (d^{-1}\varphi(H)_1, \cdots, d^{-1}\varphi(H)_{m_{\mathcal{H}}(H)}) \end{aligned}$$

$$(d := \gcd(d_\varphi(H) \mid H \in \mathcal{H}^{set}))$$

とすれば, φ^{nor} は normalized である.

Construction of $J_{G/\mathcal{H}}^{(\varphi)}$

G: fin. gp.

$\mathcal{H}$: multi set of sub gp

φ: weight func. on $\mathcal{H}$

(φ: normalized だと正しい.)

$I_{G/\mathcal{H}}^{(\varphi)}$ を次の exact seq を用いて定義する:

$$0 \longrightarrow I_{G/\mathcal{H}}^{(\varphi)} \longrightarrow \bigoplus_{H \in \mathcal{H}^{set}} \mathbb{Z}[G/H]^{\oplus m_{\mathcal{H}}(H)} \xrightarrow[(\varphi(H)_1 \varepsilon_{G/H}, \cdots, \varphi(H)\varepsilon_{G/H})_{H \in \mathcal{H}}]{} \mathbb{Z} \boxed{\longrightarrow 0}$$

$$J_{G/\mathcal{H}}^{(\varphi)} := (I_{G/\mathcal{H}}^{(\varphi)})^\circ$$

Remark

$\varphi(H) = (1, 1, \cdots, 1)$ for $\forall H \in \mathcal{H}^{set}$ とすると, $I_{G/H}^{(\varphi)} = I_{G/\mathcal{H}}$, $J_{G/H}^{(\varphi)} = J_{G/\mathcal{H}}$.

Proposition [HKO].

φ: normalized fnc. on $\mathcal{H}$

(i) $$J^{(\varphi)}_{G/\mathcal{H}} \simeq J^{(d_\varphi)}_{G/\mathcal{H}^{set}} \oplus \left(\bigoplus_{H \in \mathcal{H}^{set}} \mathbb{Z}[G/H]^{\oplus m_{\mathcal{H}}(H)-1} \right)$$

(ii) $\mathcal{H}^{red}$ を、$\forall H, H' \in \mathcal{H}^{red}$ に対して $H \not\subset H'$ なるものとすれば、

$$J_{G/\mathcal{H}} \simeq J_{G/\mathcal{H}^{red}} \oplus \left(\bigoplus_{H \in \mathcal{H}^{red}} \mathbb{Z}[G/H]^{\oplus m_{\mathcal{H}}(H)-1} \right) \oplus \left(\bigoplus_{H \in \mathcal{H}^{set} \setminus \mathcal{H}^{red}} \mathbb{Z}[G/H]^{\oplus m_{\mathcal{H}}(H)} \right)$$

(iii) $J_{G/\mathcal{H}} \simeq J_{G/\mathcal{H}^{srd}} \oplus \cdots$,

ただし、$\mathcal{H}^{srd}$ は $\mathcal{H}$ の strongly reduced subset で、$\forall H, H' \in \mathcal{H}^{srd}$ に対して、$H \not\subset gH'g^{-1}$ をみたすものである。

- 部分群をとる
- 固定部分群をとる

← rat. prob で頻出の操作.

についても、G-lattice の構造定理を示した!

§ rationality problem

Definition

X : alg. var / k

- rational / k $\overset{def}{\iff}$ $X \underset{bir}{\sim} \mathbb{P}^n_k$

  ○ $\downarrow$ $\uparrow$ ×
- stably rational / k $\quad X \times_k \mathbb{P}^m_k \simeq \mathbb{P}^n_k$

  ○ $\downarrow$ $\uparrow$ ×
- retract rational / k $\quad \mathbb{P}^n_k \underset{\exists g : rat.}{\overset{\exists f : dom.}{\rightleftarrows}} X$ (s.t.) $f \circ g = id_X$

  ○ $\downarrow$ $\uparrow$ ×
- unimodular rational / k $\quad \mathbb{P}^n_k \overset{\exists f : dom}{\dashrightarrow} X$

<u>Theorem</u> [HKO]

$\mathbb{K} := \prod_{i=1}^{r} K_i$ とし, $K_i \not\subset K_j$, $[L : k] = p^t$ とする.

このとき, 以下は同値である.

① $T_{\mathbb{K}/k}$: stab. rat. / k

② $T_{\mathbb{K}/k}$: ret. rat / k

③ · $r = 1$ and L/k : cyc. ext. $(p \neq 2)$

· $\mathbb{K}$ は (a) もしくは (b) が成り立つ. $(p = 2)$

(a) $r = 1$ and L/k : cyc. ext.

(b) $\mathrm{Gal}(L/k) \simeq D_{2^\nu} = \langle \sigma, \tau \mid \sigma^{2^\nu} = \tau^2 = 1,\ \tau\sigma\tau = 1 \rangle$

$\exists m_i \in \mathbb{Z}$ (s.t.) $\mathrm{Gal}(L/K_i) = \langle \sigma^{m_i}\tau \rangle$ for each i, and

$\{m_i \bmod 2 \mid 1 \leq i \leq r\} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.