「On strict closure of rings」 12/22 いそべさん

§1 The strict closure R^*

R : comm. ring

$Q(R)$: the total ring of fraction of R

$x \in Q(R)$ が R上整である $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $^\exists n \geq 1$, $^\exists a_i \in R$ (s.t.) $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 = 0$.

$\overline{R} := \{ x \in Q(R) \mid x$ は R上整$\}$ を R の integral closure と呼ぶ．

$\overline{R}$ は「Rに不足している元を付け足して作ったRの理想形」と考える一方，Rと$\overline{R}$にはその構造に大きな差がある． $\rightsquigarrow$ Rと$\overline{R}$の間にもう少し"手頃な理想"を作りたい．

Definition [Lipmann '71]

$R \subseteq S$: comm. rings

$R^*_S := \{ x \in S \mid x \otimes 1 = 1 \otimes x \text{ in } S \otimes_R S \}$ は RとSの中間環となる．

R^*_S を S内でのRの strict closure と呼ぶ．

特に，$S = \overline{R}$のとき，R^* で表してRの strict closure という．

$R \subseteq T \subseteq S$ を commutative として，

$$\begin{array}{ccc} S \otimes_R S & \xrightarrow{\alpha_{R,T}} & S \otimes_T S \\ \Psi & & \Psi \\ x \otimes y & \longmapsto & x \otimes y \end{array}$$

を考えれば，この環準同型の核は $\ker(\alpha_{R,T}) = \langle x \otimes 1 - 1 \otimes x \mid x \in T \rangle$ となる．

∵ $\alpha_{R,T}$ が同型 $\Leftrightarrow$ $T \subseteq R^*_S$ $\rightsquigarrow$ $S \otimes_R S = S \otimes_T S$.

ここで，

$$\begin{tikzcd} S \otimes_R S \arrow[r, "\alpha", "\simeq"'] \arrow[rr, bend right, "\alpha"'] & S \otimes_{R^*_S} S \arrow[r, "\alpha", "\simeq"'] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & S \otimes_{[R^*_S]^*_S} S \\ & {} & \end{tikzcd}$$

∵ $[R^*_S]^*_S = R^*_S$. 特に，$R^{**} = R^*$ である．

以下， $\mathcal{X}_R = \{ I \subseteq R \mid I$ は R の整閉イデアルで R の非零因子を含むもの $\}$

$I \in \mathrm{ideal}(R)$ が integral closed

$\overset{\text{def}}{\iff}$ $\overline{I} = \{ x \in R \mid \exists n \geq 1, \exists a_i \in I^i \text{ (s.t.) } x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \}$

が I と一致.

Theorem 1.2 [Lipman-CCCEGIM, 71'-23]

R は CM で semi-local

${}^\forall M \in \max(R)$ で $\mathrm{ht}_R(M) = 1$ $\Longrightarrow$ $R = R^* \overset{\text{iff}}{\iff} {}^\forall I \in \mathcal{X}_R, \exists a \in I \text{ (s.t.) } I^2 = aI$.

($\iff$ R は Arf 環)

Corollary 1.3

$(R, \mathfrak{m})$ は CM-local ring で $\mathrm{kr.dim}(R) = 1$ とする.

このとき， $R = R^*$ ならば， $\underbrace{e(R)}_{\text{重複度}} = \underbrace{v(R)}_{\text{埋め込み次元}}$ が成り立つ.

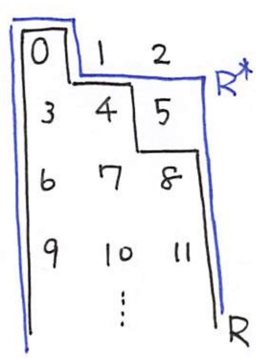
一般には "$\geq$"

RLR からの全射をつくったときの RLR の次元

Example 1.4

$R = \mathbb{C}[[t^3, t^4]] \subseteq \mathbb{C}[[t]] = \overline{R}$ について， $e(R) = 3$， $v(R) = 2$ で $e(R) > v(R)$ であるが

$R^* = \mathbb{C}[[t^3, t^4, t^5]]$ で $e(R) = v(R) = 3$ である.



//

$H_1(R) := \{ \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R) \mid \operatorname{ht}_R(\mathfrak{p}) = 1 \}$ とする.

Theorem 1.5 [CCCEGIM'23]

R は Noether ring で Serre の第2条件をみたし, $\forall M \in \operatorname{Max}(R)$, $\operatorname{ht}_R(M) \geq 2$ とする.

"⇐"の証明に必要なテクニカルな条件.

このとき,

$$R = R^* \iff \forall \mathfrak{p} \in H_1(R),\ (R_\mathfrak{p})^* = R_\mathfrak{p}$$

§2 Basic properties of R^*

Proposition 2.1 [Lipmann]

$(R, \mathfrak{m})$: local　$\mathfrak{n} := \mathfrak{m}\overline{R} \cap R^*$ とすると, $(R^*, \mathfrak{n})$ も local であり, $R^*/\mathfrak{n} \simeq R/\mathfrak{m}$ である.

Remark

R : local でも $\overline{R}$ は local とは限らない.

$$R = \mathbb{C}[X,Y]/(XY(X+Y)) \rightsquigarrow \overline{R} \simeq \mathbb{C}[[Y]] \times \mathbb{C}[[X]] \times \mathbb{C}[X,Y]/(X+Y)$$

一方,

$R^* = R[(Y,0,0)]$ であり, R^* は local である.

Theorem 2.2 [Lipman]

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Spec} R^* & \longrightarrow & \operatorname{Spec} R \\ \mathfrak{p} & \longmapsto & \mathfrak{q} := \mathfrak{p} \cap R \\ \mathfrak{q}\overline{R} \cap R^* & \longleftarrow\!\shortmid & \mathfrak{q} \end{array}$$

は全単射であり, $\forall \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R^*$, $(R^*_\mathfrak{p})/\mathfrak{p}(R^*_\mathfrak{p}) \simeq R_\mathfrak{q}/\mathfrak{q}R_\mathfrak{q}$ である.

§3 The structure of R^*

本質的

$(R, \mathfrak{m})$: CM local で $\operatorname{kr\text{-}dim}(R) = 1$ で $\overline{R}$ も local とする.

$R_1 := \bigcup_{\ell \geq 0} (\mathfrak{m}^\ell :_{Q(R)} \mathfrak{m}^\ell)$ とすると, $R \subseteq R_1 \overset{\text{subring}}{\subseteq} \overline{R}$ であり R_1 も local である. $\mathfrak{m}_1 \in \operatorname{Max} R_1$ とする.

$R_0 = R$, $\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{m}$ として帰納的に $(R_i, \mathfrak{m}_i)$ を定義すると, 拡大列

$$R = R_0 \subseteq R_1 \subseteq R_2 \subseteq \cdots \subseteq R_n \subseteq \cdots \subseteq \overline{R}$$

ができる.

Theorem 3.1 [I'23]

$R = R^*$ とすれば，$\forall I \in \chi_R$，$\exists n \geq 0$ (s.t.) $I = m_0 m_1 \cdots m_n$ とかける．

Theorem 3.2 [I, Kumashiro '24]

$R = R^*$ として，M を reflexive R-module with $\mathrm{rank}_R M > 0$ とする．
このとき，$\exists I_1, \ldots, I_n \in \chi_R$ (s.t.) $M \simeq I_1 \oplus I_2 \oplus \cdots \oplus I_n$ となる．

($\overline{R}$: local は必要でこのときは，$\mathrm{rank}_R M > 0$ は自動的に従う)

§4 Construction of R^*

(R, m) : CM-local ring で kr-dim$(R) = 1$ で $\overline{R}$ を local とする．

$\forall n \geq 0$ に対して

$$R_{(n)} := R + m_0 R_1 + m_0 m_1 R_2 + \cdots + m_0 m_1 \cdots m_{n-1} R_n$$

と定める．

Theorem 4.1 [I'24]

$R^* = \bigcup_{n \geq 0} R_{(n)}$ である．ゆえに，R^* が有限生成 R-加群であることと，$\exists n \geq 0$, (s.t.) $R^* = R_{(n)}$ は同値である．

Example 4.2.

(1) $R = \mathbb{C}[[t^3, t^{3\ell+1}]]$ $(\ell \geq 1)$ のとき $R^* = R_{(\ell)} = \mathbb{C}[[t^3, t^{3\ell+1}, t^{3\ell+2}]]$ である．

(2) $R = \mathbb{C}[[X, Y]]/(Y^3)$ のとき，$\forall n \geq 1$ について，$R_{(n)} = R\left[\frac{y^2}{x^n}\right]$ であり，$R^* = \bigcup_{n > 0} R_{(n)}$ とかける． //

R^* の有限生成性について，次が成り立つ：

Theorem 4.3 [I'24]

R^* : 有限生成 R-加群 $\iff$ $(\sqrt{0})^2 = 0$ in $\widehat{R}$

($\overline{R}$: fin.gen. R-module $\Leftarrow$ $\sqrt{(0)} = (0)$ in $\widehat{R}$)