「Minimal compactification of the affine plane with only star-shaped singularities」

澤原さん (34前大)

以下，基礎体を $\mathbb{C}$ とする．また，aff. plane は $\mathbb{C}^2$ である．

Contents

---

§1.

V : smooth projective surface

Definition

$V \supseteq D_1, \dots, D_n$: irreducible curves
$a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$

に対して，形式和 $\sum_{i=1}^{n} a_i D_i$ を V上の因子といい，

Definition

D_1, D_2 : V上の因子．このとき

$$(D_1, D_2) := \chi(\mathcal{O}_V) - \chi(\mathcal{O}_V(-D_1)) - \chi(\mathcal{O}_V(-D_2)) + \chi(\mathcal{O}_V(-D_1 - D_2))$$

Fact

$\mathrm{Pic}(V)$: Vのピカール群 $\xrightarrow[w]{\sim}$ $\mathrm{Cl}(V)$: V上の因子を線形同値でわったもの

こちらの和は Pic ではテンソルになる．

D : V上の因子

$$\rightsquigarrow \mathcal{O}_V(D) := w^{-1}(D) \in \mathrm{Pic}(V)$$

$$\chi(\mathcal{O}_V(D)) := \sum_{i=0}^{2} (-1)^i \dim_{\mathbb{C}} H^i(V, \mathcal{O}_V(D)) \in \mathbb{Z}$$

Fact

D_1, D_2 : V上の因子

D_1とD_2の中に既約成分がないとする.

このとき,

$$(D_1\cdot D_2) = \sum_{p\in V} I_p(D_1\cdot D_2) \geq 0$$

局所交叉数

stalkについては局所環の剰余体上のベクトル空間の次元

Example

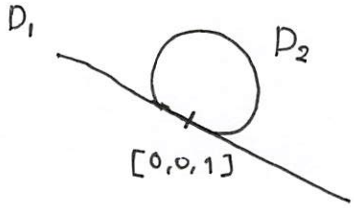
$V = \mathbb{P}^2_{[x:y:z]}$

$D_1 = (y=0)$, $D_2 = (yz - x^2 = 0)$

直感的な交叉数

$$\rightsquigarrow (D_1\cdot D_2) = \underbrace{I_{[0,0,1]}(D_1\cdot D_2)}_{} = 2$$

[0:0:1] 以外は 0 になる



Definition

C : V上の既約曲線, $m\in\mathbb{Z}$

このとき, Cが **m-curve** とは

$$C \simeq \mathbb{P}^1, \quad (C)^2 := (C, C) = m$$

Fact

C : m-curve ($m\in\mathbb{Z}$) に対して

① $m=-1 \rightsquigarrow$ Cは1点につぶすことができる. この1点はsmooth ptである.

② $m\leq -2 \rightsquigarrow$ Cは1点につぶすことができる. この1点は商特異点である.

特に, 巡回特異点である.

◎ Weighted dual graph

V : smooth projective surface

$D = \sum_i D_i$: V上の因子.

係数が1なので, このような因子はreduced div. と呼ばれる.

Definition

Dの Weighted dual graph を以下で定義する：

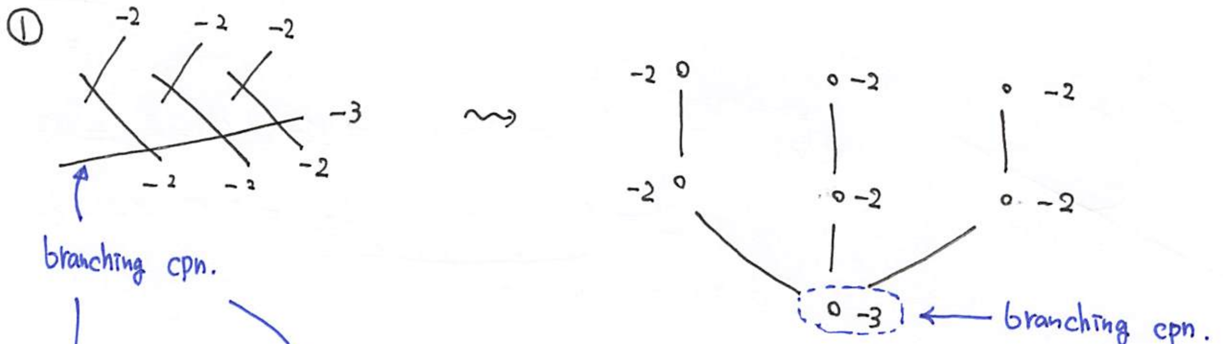
① vertex ： Dの各既約成分 D_i

② weight ： 重みは $(D_i)^2$ と定める．　　χの計算式をみれば D_1, D_2 は可逆．

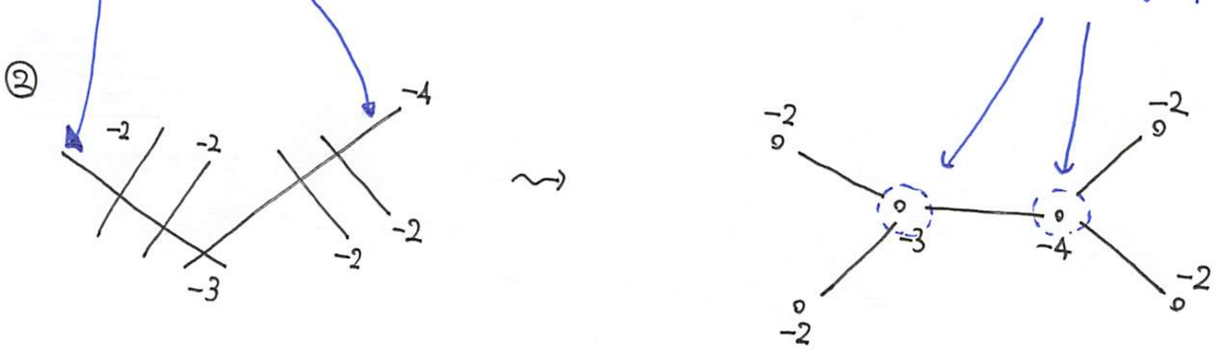
③ edge ： D_1とD_2の間に $(D_1 \cdot D_2)$ 本の辺を引く．

Example

①



②



Definition

D_i： Dの既約成分

このとき，Dの branching component とは，

$$\underbrace{(D_i \cdot D - D_i)}_{} \geq 3$$

となる D_iのことである．　　D_iに対応する頂点から出ている辺の数 (c.f. 上の例)

◎ X : normal surface

$\pi : V \longrightarrow X$: minimal resolution

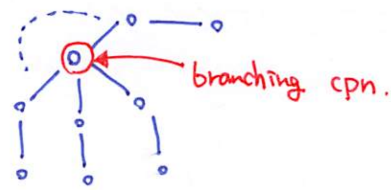
D : reduced exceptional div. of π

Definition

X が高々星型特異点をもつとは, X の任意の連結成分 $D^{(i)}$ について,

$$\#(\text{branching component of } D^{(i)}) \leq 1$$

例だと, ① は星型特異点で ② は (branching cpn が 2つあるので) 星型特異点ではない.



◎ V : smooth projective surface

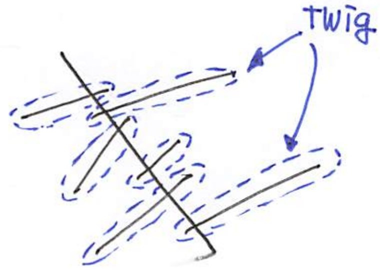
D : reduced div. on V (s.t.) $\forall$ irr. components of $D \simeq \mathbb{P}^1$

A : subgraph of the weighted dual graph of D.

(s.t.) $$A = \underset{-a_1}{\circ} — \underset{-a_2}{\circ} — \underset{-a_3}{\circ} — \cdots — \underset{-a_n}{\circ}$$

Definition

① A を D の weighted dual graph の 小枝 (twig) と呼ぶ



② $A := [a_1, \cdots, a_r]$ で表す

③ $\overline{A} := [a_2, \cdots, a_r]$ とおく.

$\underline{A} := [a_1, a_2, \cdots, a_{r-1}]$ とおく.

④ $$d(A) := \det \begin{pmatrix} a_1 & -1 & & \\ -1 & a_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & a_r \end{pmatrix} \longleftarrow \begin{pmatrix} -a_1 & 1 & & \\ 1 & -a_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & -a_r \end{pmatrix}$$ が $\underset{-a_1}{\circ} — \underset{-a_2}{\circ} — \cdots — \underset{-a_n}{\circ}$ に対応する交叉行列

⑤ A : admissible $\overset{\text{def}}{\iff}$ $a_i \geq 2$ がすべての i で成り立つ.

⑥ A を admissible とする. このとき

$\exists 1$ $A^* = [a_1', \cdots, a_s']$: admissible twig (s.t.) $[a_1, \cdots, a_r, 1, a_1', \cdots, a_s']$ は $[0]$ につぶすことができる.

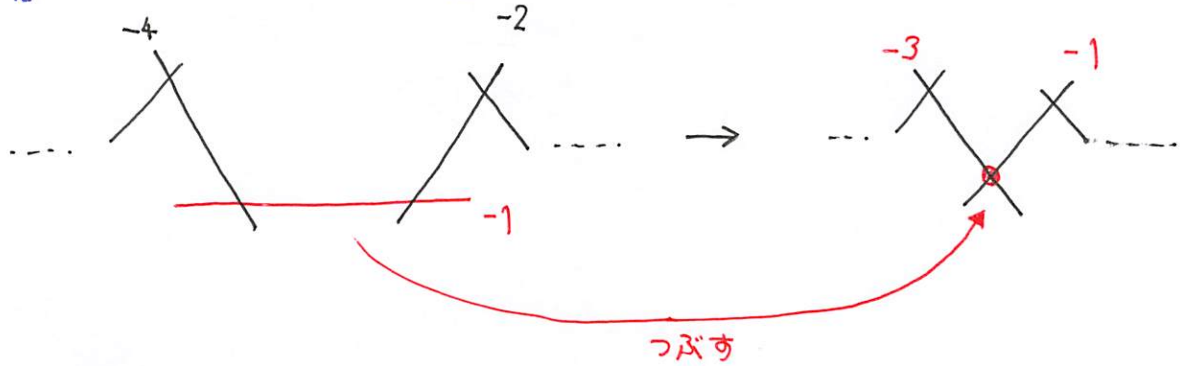
A^* を A の adjoint と呼ぶ.

Example

$A = [2,4] \Longrightarrow A^* = [2,2,3]$

∵ $[2,4,\overset{-1\ \ -1}{1},2,2,3] \to [2,3,\overset{-1\ \ -1}{1},2,3] \to [2,2,1,3] \to [2,1,2] \to [1,1] \to [0]$

ここ　　　ここ



Remark

(−1)した数だけ ×をかく

$\boxed{\begin{matrix}2\\4\end{matrix}}$ A ⇝

×
× × ×

⇝

　×
　×
× ×

90°C回転させる

⇝ $\boxed{\begin{matrix}2\\2\\3\end{matrix}}\begin{matrix}-1\\-1\\-1\end{matrix}$ A^*

(×の数)−1をかく．

Example

$A = [5,2,3]$

× × × ×
　　　×
　　　× ×

⇝

　　×
× × ×
×
×
×

⇝

2 − 1
4 − 1
2 − 1
2 − 1
2 − 1

$A^* =$

[2 4 2 2 2]

§2

X : normal surface

① X 上の canonical div. K_X が定まる.

② $\pi : V \longrightarrow X$: minimal resolution

$D = \sum_i D_i$: reduced exceptional div of π.

$\rightsquigarrow K_V \equiv \pi^* K_X + \sum_i a_i D_i$

Definition

X : has at most term (resp. cano, lt, lc) singularities

$\overset{\text{def}}{\iff} \forall a_i > 0$ (resp. $\forall a_i \geq 0$, $\forall a_i > -1$, $\forall a_i \geq -1$)

Fact

X has at most term. sing. $\overset{\text{iff}}{\iff}$ X has at most quotient sing. pt's

Fact (2-dim'l)

① lc sing's are classified

② lt sing's $\Longrightarrow$ star-shaped sing's

§3

Definition

X : normal compact surface

$\Gamma \subseteq X$: closed curve

このとき

① (X, Γ) が $\mathbb{C}^2$ の cpt'n $\overset{\text{def}}{\iff}$ $X \setminus \Gamma \simeq \mathbb{C}^2$

② (X, Γ) が $\mathbb{C}^2$ の minimal cpt'n $\overset{\text{def}}{\iff}$ (X, Γ) は $\mathbb{C}^2$ の cpt'n で Γ は irreducible.

Theorem [Remmert - Van de Ven '60]

(X, Γ) : min. cpt'n of $\mathbb{C}^2$ (s.t.) X : smooth

$\Longrightarrow X = \mathbb{P}^2$ で Γ : line である.

Example

$X = \mathbb{P}^2_{[x:y:z]}$, $\Gamma = (z=0) \subseteq X$

$\rightsquigarrow X \setminus \Gamma = \{[x:y:1] \mid x, y \in \mathbb{C}\} \simeq \mathbb{C}^2$

☺ (X, Γ) : min cpt'n of $\mathbb{C}^2$.

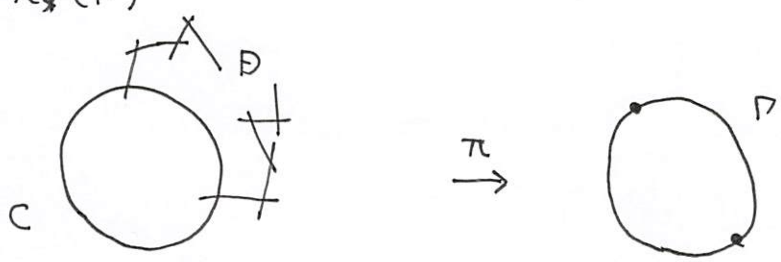
以下，この次の設定で考える：

(X, Γ) : min. cpt'n of $\mathbb{C}^2$ (s.t.) $\mathrm{Sing}(X) = \emptyset$

$\pi : V \to X$: min. resol.

D : reduced exceptional div. of π

$C := \pi_*^{-1}(\Gamma)$



Theorem [Kojima '01, Kojima-Takahashi '09]

X has at most lc sing's を仮定する．

このとき

① C + D の weighted dual graph を分類した．

② X has only star-shaped sing's.

この仮定を外した

Theorem [S]

X has only star-shaped sing's.

$\Rightarrow$ C + D の weighted dual graph を分類した．