Ramanujan-Serre 微分作用素と楕円曲線に関するKaneko-Sakaiの結果について

(後藤 新裕 / 九州大)

Contents

1. Introduction
2. The Ramanujan-Serre diff. Operation
3. The Associated Newform of Elipic curve / $\mathbb{Q}$
4. Main Theorem.

$(y^2 + a_1 xy + a_3 y = x^3 + a_2 x^2 + a_4 x + a_6 ,\ a_i \in \mathbb{Q})$

§1. Introduction

$\mathbb{H} := \{ z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0 \}$, $\quad q := e^{2\pi i z} \quad (z \in \mathbb{H})$

$$E_4(z) := 1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) q^n$$

$$E_6(z) := 1 - 504 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_5(n) q^n$$

ただし, $\sigma_k(n) = \sum_{0<d|n} d^k \quad (k \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$.

$$\eta(z) := e^{2\pi i z/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)$$

$$\Delta(z) := \eta(z)^{24}$$

$$\rightsquigarrow \quad E_4(z)^3 - E_6(z)^2 = 1728\, \Delta(z).$$

これは 楕円曲線 $y^2 = x^3 - 1728$ ($/\mathbb{Q}$) とみれる. ここで, $x = \dfrac{E_4(z)}{\eta(z)^8}$, $y = \dfrac{E_6(z)}{\eta(z)^{12}}$.

§2. The Ramanujan-Serre 微分作用素

$N \in \mathbb{Z}_{>0}$. $\quad SL_2(\mathbb{Z}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \ a,b,c,d \in \mathbb{Z},\ ad - bc = 1 \right\}$

$\quad \rotatebox{90}{$\leq$}$

$\Gamma_0(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \ c \equiv 0 \bmod N \right\}$

Deffinition

正則関数 $f: \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ が weight k の モジュラー曲線 (modular form) であるとは
(カスプ)

① $f(z) = (cz+d)^{-k} f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)$ for $\forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$

② フーリエ展開

$$(cz+d)^{-k} f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \sum_{\substack{n \geq 0 \\ (n>0)}} c_n q_N^n \qquad (q_N = e^{2\pi i z/N})$$

for $\forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$.

をもつ.

Deffinition

有理型関数 $f: \mathbb{H} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ が モジュラー関数 (modular function) (of weight k)

であるとは, ①, ② を満たすことである.

$$\mu_N := N \prod_{\substack{p \mid N \\ p:\text{prime}}} \left(1 + \frac{1}{p}\right)$$ ← これは $[SL_2(\mathbb{Z}) : \Gamma_0(N)]$ と一致.

$$\Delta_N(z) := \left(\prod_{d \mid N} \eta(dz)\right)^{\frac{24}{\mu_N}}$$ ← $\Delta_1(z) = \Delta(z)$ である.

Fact

$\Delta_N(z)$ は $k_N := \frac{12\,\sigma_0(N)}{\mu_N}$ の weight の cusp form になっている.

Definition

$$\partial_4^{(N)}(f)(z) := \frac{k_N}{4} \frac{1}{2\pi i} \frac{df}{dz}(z) - \left(\underbrace{q \frac{d}{dq} \log \Delta_N(z)}\right) f(z), \text{ where}$$

f: modular form of weight 4

$q\frac{d}{dq} = \frac{1}{2\pi i}\frac{d}{dz}$ より 〜 の部分は $\frac{\Delta_N'(z)}{\Delta_N(z)}$ と一致.

を Ramanujan - Serre 微分作用素 という.

$\partial_4^{(N)}(f)(z)$ は weight 6 の modular form になっている.

$h_N := \dfrac{\sigma_1(N)}{\mu_N}$ とすれば、

$$\Delta_N(z) = q^{h_N} + (q\text{に関する高次の項})$$

The following list contains all N (s.t.) $k_N \in 2\mathbb{Z}$ and $h_N \in \mathbb{Z}$.

N	1	2	3	5	6	11	14	15
k_N	12	8	6	4	4	2	2	2
h_N	1	1	1	1	1	1	1	1
μ_N	1	3	4	6	12	12	24	24

以下では、このような N のみを考える。

B. The Associated Newform of Ellipic curve / $\mathbb{Q}$.

$E/\mathbb{Q}$: $y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6$ (ellipic curve / $\mathbb{Q}$)

$a_1, \cdots, a_6 \in \mathbb{Z}$, global minimal.

Definition

$E/\mathbb{Q}$ に対する L-関数 は

$$L(E/\mathbb{Q}, s) = \prod_{p:\text{prime}} \frac{1}{1 - a_p p^{s} + p^{1-2s}} \quad (\mathrm{Re}(s) > \tfrac{3}{2})$$

(ほとんどの p で a_p はOKだが要注意)

ただし、

$$a_p := p + 1 - \# \underbrace{\tilde{E}(\mathbb{F}_p)}_{\{\infty\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{F}_p^2 \mid y^2 + \bar{a}_1 xy + \bar{a}_3 y = x^3 + \bar{a}_2 x^2 + \bar{a}_4 x + \bar{a}_6 \pmod p\}}$$

Theorem

$L(E/\mathbb{Q}, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{c_n}{n^s}$ として、$f_E(z) := \sum_{n=1}^{\infty} c_n q^n$ であるとき、f_E は weight 2 の cusp form.

この f_E のことを $E/\mathbb{Q}$ の associated newform と呼ぶ。

4 Main Theorem

Theorem [Kaneko - Sakai '13]

$N = 1, 2, 3, 5, 6$ のとき，

$$Q_N = Q_N(z) = E_{4,N}^{i\infty}(z) = C_N \sum_{0<d|N} \frac{\mu(d)}{d^4} E_4\left(\frac{N}{d}z\right)$$

$$C_N := \prod_{\substack{p|N \\ p:\text{prime}}} \left(1 - \frac{1}{p^4}\right)^{-1}, \quad \mu : \text{Möbius funct.}$$

$N = 11, 14, 15$

$$Q_N = Q_N(z) = E_{4,N}^{i\infty}(z) + \underbrace{(\text{some cusp form})}_{\Delta_N \text{の1次以上のpoly.}}$$

と定める．このとき，組 $\left(\dfrac{Q_N}{\Delta_N^{\frac{4}{k_N}}}, \dfrac{\partial_4^{(N)}(Q_N)}{\Delta_N^{\frac{6}{k_N}}} \right)$ は ある $E_N/\mathbb{Q}$ の方程式をみたす．

modular function

($\neq$ form)

更に，$E_N/\mathbb{Q}$ の associated newform は $\Delta_N\left(\frac{k_N}{2}z\right)^{\frac{2}{k_N}}$ で与えられる．

Theorem [Y. Martin and K. Ono '97]

先の 8コの new form たちは $\underbrace{\text{eta-product}}_{\eta(\,)\text{の積}}$ で weight 2 の newform なもの全体である．