基礎体の非分離拡大に対する特異点の振る舞いについて．（佐藤・九州大）

§1 Introduction

- 代数幾何 ------ $k = \bar{k}$
- 数論 ------ 代数体 $\mathbb{Q}, \mathbb{F}_p, \overline{\mathbb{F}_p}$
- 表現論 ------ $k = \bar{k}$
- 暗号理論 ------ $\mathbb{Q}, \mathbb{F}_p, \overline{\mathbb{F}_p}$

} 完全体

Question

$b, c \in \mathbb{C}$ として，$f_{b,c}(x) = x^2 + bx + c$ とする．
$f_{b,c}(x) = 0$ の解の個数はいくつか？

Answer.

① b, c に依存している．つまり $b^2 \neq 4c$ なら 2コ，$b^2 = 4c$ なら 1コ．
(general) (special)

② general な b, c だと 2コ．

Remark

$R_{b,c} := \mathbb{C}[X]/(f_{b,c})$ とおく．
このとき，

$$R_{b,c} : \text{regular} \overset{\text{iff}}{\Longleftrightarrow} f_{b,c} = 0 \text{ の解は } 2\text{コ}.$$

つまり ② の言いかえは，general な b, c で $R_{b,c}$ は regular． □

Setting.

- $k = \bar{k}$
- $f_1, \dots, f_\ell \in k[x_1, \dots, x_m, t_1, \dots, t_n]$ ： $m+n$ 変数多項式環．
- $R := k[x_1, \dots, x_m, t_1, \dots, t_n]/(f_1, \dots, f_\ell)$
- $\mathfrak{a} := (a_1, a_2, \dots, a_n) \in k^n$ に対して

$$f_{i,\mathfrak{a}} := f(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_n) \in k[x_1, \dots, x_n]$$

とおき，

$$R_{\mathfrak{a}} := k[x_1, \dots, x_n]/(f_{1,\mathfrak{a}}, \dots, f_{\ell,\mathfrak{a}}).$$

（佐藤）

No. 7

Date 6・11・

例

$f(x, t_1, t_2) := x^2 + t_1 x + t_2 x$ とすれば，$R_{b,c} = R_{(b,c)}$.

Philosophy 1

Setting の状況で

$\exists U \subseteq \Bbbk^n$: Zariski-dense

(s.t.) ① $\forall \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in U$ に対して，$R_{\mathfrak{a}}, R_{\mathfrak{b}}$ は同じくらい性質が良い.

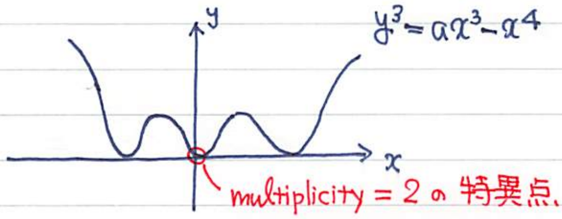
② $\forall \mathfrak{a} \in U$, $\forall \mathfrak{b} \notin U$ に対して，$R_{\mathfrak{a}}$ は $R_{\mathfrak{b}}$ より性質が良い.

例

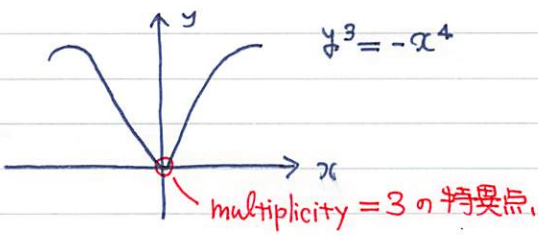
$R_a := \mathbb{C}[x, y] / (ax^2 - x^4 - y^3) \quad (a \in \mathbb{C})$

$U := \mathbb{C} \setminus \{0\}$

① $a \in U$ ならば，R_a は



② $a \notin U$ ならば，R_a は



Problem 1

$\{R_{\mathfrak{a}}\}_{\mathfrak{a} \in \Bbbk^n}$ が与えられたとき，general member の性質がどのくらい良いのかを調べるにはどうすれば良いか？

(佐藤)

No. 8
Date 6・11・

これの難しさは，どの $a \in k^n$ が general member なのかわからないところにある．
これを解決するには，"generic member" & "geometric generic member" を調べればよい．

Definition

$\{R_a\}_{a \in k^n}$ を考える．
$K := k(t_1, \cdots, t_n)$ を n 変数有理関数体
このとき，各 f_i は $f_i \in K[x_1, \cdots, x_m] \subseteq \overline{K}[x_1, \cdots, x_m]$ であるので，

$$R_K := K[x_1, \cdots, x_m]/(f_1, \cdots, f_l), \quad R_{\overline{K}} := \overline{K}[x_1, \cdots, x_m]/(f_1, \cdots, f_l)$$

と定める．R_K を generic member，$R_{\overline{K}}$ を geometric generic member という．

Philosophy 2.

"generic member R_K の性質" ≒ "geometric generic member" $R_{\overline{K}}$ の性質．

◎ $R_{\overline{K}}$ の性質を調べるには？
① R_K を調べる．
② R_K と $R_{\overline{K}} = R_K \otimes_K \overline{K}$ を比較する．
(これが今日のメイン．)

Additional Setting.

- K : field (e.g. $K = k(t_1, \cdots, t_n)$)
- A : fin. gen. K-alg. (e.g. $A = R_K$)
- $\overline{A} := A \otimes_K \overline{K}$.

Problem 2

A が良い性質をもつ $\overset{?}{\Longrightarrow}$ $\overline{A}$ が良い性質をもつ．

(佐藤)

$\rightsquigarrow$ k : 完全体 なら Yes.

k : 不完全体 なら No.

($\overset{\Longleftrightarrow}{\text{def}}$ $\mathrm{char}(k) = p$ かつ $\exists a \in k$ (s.t.) $\sqrt[p]{a} \notin k$

(e.g.) $k = k(t_1, \dots, t_n)$: 不完全.)

では, kが不完全として, (Prob2) を成立させるには, どのような仮定を課せば良いか?

例

k: 不完全

① A : regular $\not\Longrightarrow$ $\bar{A}$: regular.

② $m \in \max(A)$ で $k \subset A/m$ が separable とする.

このとき, A を m の周辺に十分局所化すると

A : regular $\Longrightarrow$ $\bar{A}$: regular.

§2 Main results.

§1 では "良い性質" = "regular" を例にあげた.

§2 では "良い性質" = "klt" を考える.

Definition

X : k上の normal variety.

・$\exists f : Y \to X$: Xの (log)特異点解消 $\longleftarrow$ (この仮定は, $\mathrm{char} = 0$ or toric or $\dim \leq 3$ ならOK)

・cannonical divisor K_X が $\mathbb{Q}$-Cartier

($(\Omega_{X/k}^{\wedge \dim X})^{**}$ に対応する divisor)

このとき, Xが高々 klt 特異点 しか持たない.

$\overset{\Longleftrightarrow}{\text{def}}$ Y上 定義される $\mathbb{Q}$-divisor $K_Y - f^* K_X$ の全ての係数が -1 より大きい.

(気持ちとしては,

klt …. K_X が K_Y に比べてそんなに小さくない

つまり, X と Y に そんなに差がない.)

Fact

① regular $\Longrightarrow$ klt.

② dim $=1$ $\Longrightarrow$ regular $\Longrightarrow$ klt.

③ dim $=2$, $k=\mathbb{C}$ $\Longrightarrow$ "klt" と商特異点は同値.

④ MMPで大切.

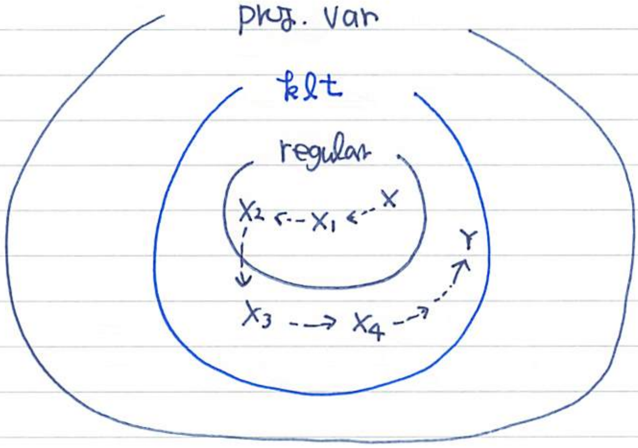
(minimal model program)

---- Input: X : proj. var

Output: Y : proj. var であって, $X \overset{\text{birational}}{\sim} Y$ & Y : minimal.

このとき, X が regular でも Y が regular とは限らない.

しかし, 高々 klt となっている.



Theorem A

A : K上有限生成な normal domain で char$(K)>3$ とする. $\dim(A)=2$とする.

$m \in \max(A)$ とする. このmについて, A/m は K上分離的とする.

$\bar{A}$ が normal で Aが klt であるとする.

このとき, A を m の十分周辺で局所化すると, $\bar{A}$ は klt である.

spec(A)が klt

spec$(\bar{A})$ が klt.

(佐藤)

Corollary B. [Bertini type theorem]

X : quasi-projective var / $k=\bar{k}$, $\mathrm{char}(k)>3$ & $\dim = 3$.
($\rightsquigarrow$ $\exists N \in \mathbb{N}$ (s.t.) $X \subseteq \mathbb{P}^N$)

X : klt & $H \subseteq \mathbb{P}^N_k$: general hyperplane $\rightsquigarrow$ $X \cap H$: klt.

(Sketch of proof)

X : affine $\rightsquigarrow$ $X = \mathrm{Spec}(S) \subseteq \mathbb{A}^N_k$

$S = k[x_1,\dots,x_N]/(f_1,\dots,f_\ell)$, $H = \mathrm{Spec}\left(k[x_1,\dots,x_N]/(\underbrace{a_1x_1+\dots+a_Nx_N}_{=:h})\right)$

このとき,

$$X \cap H = \mathrm{Spec}\left(k[x_1,\dots,x_N]/(f_1,\dots,f_\ell,h)\right)$$

$\mathfrak{a} = (a_1,\dots,a_N) \in k^N$ として,

$$R_{\mathfrak{a}} := k[x_1,\dots,x_N]/(f_1,\dots,f_\ell,h)$$

とおく.

ETS: general なので, $R_{\mathfrak{a}}$: klt を示す.

その為に geometric generic member をみればよい.

S は3次元であり, X は klt なので, $R_K := K[x_1,\dots,x_N]/(f_1,\dots,f_\ell, t_1x_1+\dots+t_Nx_N)$ も klt となる.
これは2次元なので, 定理より $R_{\bar{K}}$ も klt である.
よって general な $R_{\mathfrak{a}}$ で klt である. □