Frobenius 押し出し関手の圏論的エントロピー（松井，徳島大）

Setup.

- $(R, \mathfrak{m}, k)$: comm. Noeth. local ring
  ここで R の標数を $p>0$ とする．

$\rightsquigarrow$ $F : \boxed{R} \longrightarrow \boxed{R}$ という Frobenius 写像が定義される．
$\quad\quad x \longmapsto x^p$

Assumption

R : 完備で $k = \bar{k}$

このとき，F は finite である．
例えば，$R = k[[x_1, \ldots, x_m]]/I$ ）

- $D^b(R)$: 有限生成 R-加群の有界導来圏．（$= D^b(\mathrm{mod}\, R)$）
- $K^b(R)$: 有限生成射影 R-加群の有界ホモトピー圏（$= D^b(\mathrm{proj}\, R)$）

Remark

$D^b(R)$, $K^b(R)$ は三角圏である．
すなわち：
- shift $[1]$ ……… 複体の次数を左にずらす．
- exact triangle …… $\underbrace{X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z}_{\fallingdotseq \text{"short exact sequence"}} \longrightarrow X[1]$

をもつ． □

- $M \in \mathrm{mod}\, R$ に対して，F を通じて新たな R-加群構造を入れる．
  これを F_*M とかく．
  (i.e.) $x \in M$, $r \in R$ に対して，$rx := F(r)x = r^p x$.

$\rightsquigarrow$ $F_* : D^b(\boxed{R}) \longrightarrow D^b(\boxed{R})$: exact functor.（三角関手）

$$\begin{array}{ccc} \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ (\cdots \to M \to \cdots) & \longmapsto & (\cdots \to F_*M \to \cdots) \end{array}$$

これを Frobenius 押し出しという．

(松井).

No. ②

Date 6・11・日

・ $M \in \mathrm{mod}\, R$ に対して

$$F^*M := M \otimes_{\boxed{R}} \boxed{F_*(R)}$$

⇝ $F^* : K^b(\boxed{R}) \longrightarrow K^b(\boxed{R})$: exact functor (三角関手)

$$\begin{array}{ccc} K^b(R) & & K^b(R) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ (\cdots \to P_n \to \cdots) & \mapsto & (\cdots \to F^*P_n \to \cdots) \end{array}$$

これを Frobenius 引き戻し という.

F_*, F^* は 正標数の 特異圏の 研究に 重要な 役割 を 果たす.

§1. Introduction

数学における エントロピー …… 力学系の 複雑さを 測る 指標 (不変量)

力学系 = 数学的対象 + self map

(e.g.) ・トポロジカル・エントロピー (Adler - Konheim - Mc Andrew '65)

X : compact top. sp., $f : X \to X$: conti.

⇝ $h_{top}(f) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

・ local entropy (Majidi Zolbanin - Miasnikov - Szpiro '13)

R : local ring, $\phi : R \to R$ in CRing.

⇝ $h_{loc}(\phi) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

・ categorical entropy (Dimitrov - Haiden - Katzarkov - Kontsevich '14)

$\mathcal{T}$: 三角圏, $\Phi : \mathcal{T} \to \mathcal{T}$: exact functor

⇝ $h_t^{\mathcal{T}}(\Phi) \in \mathbb{R}$ $(t \in \mathbb{R})$

$t=0$ のときは $h_{cat}^{\mathcal{T}}(\Phi)$

⇝ エントロピーが 小さい ⟺ 力学系が 単純.

Theorem [Kikuta - Takahashi '17]

いくつかの仮定の下で

$$h_{cat}(f^*) = h_{top}(f).$$

つまり、classical なエントロピーは、ある意味で categorical entropy によって包絡される。
local entropy の場合も次の結果がある。

Theorem [MZM '19]

$$h_t(F^*) = h_{loc}(F) \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

Q. 上の結果は "引き戻し" を用いているが、"押し出し" ではどう振る舞うか？

$\boxed{\text{Today}}$

$h_{cat}(F_*)$ と $h_{loc}(F)$ を比較する。

1 local & Categorical entropy.

Definition

(R, m, k) : comm. Noeth. local ring

$\phi : R \longrightarrow R$: loc & finite ring hom

このとき

$$h_{loc}(\phi) := \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \ell_R(R/\phi^n(m)R) \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

[MZMS]で保障.

Theorem [MZMS]

(R, m, k) : set up の条件で仮定を満たすとき

$$h_{loc}(F) = (\text{kr-dim} R) \cdot \log p.$$

Example

$R = k[[x_1, \ldots, x_d]]$, char $k = p > 0$, $k = \bar{k}$ とする。

$m = (x_1, \ldots, x_d)$ である。

$\rightsquigarrow \quad F^n(m)R = (x_1^{p^n}, \ldots, x_d^{p^n})$

$\rightsquigarrow \quad R/F^n(m)R = \bigoplus_{i_1, \ldots, i_d = 0}^{p^n - 1} k x_1^{i_1} \cdots x_d^{i_d}$

$\rightsquigarrow \quad \ell_R(R/F^n(m)R) = \text{rank}_k(R/F^n(m)R) = p^{nd}$

$\rightarrow h_{loc}(F) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} nd \log p$

$= d \log p.$ //

(松井)

No. 4

Date 6 · 11 · 日

Definition

$\mathcal{T}$: tri. cat.

$\Phi : \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ を三角関手とする. (この話では, $\mathcal{T} = D^b(R)$, $\Phi = F_*$)

$X \in \mathcal{T}$ に対して, thick(X) をとる.

$\mathcal{X} \subset \mathcal{T}$: thick $\overset{def}{\iff}$ $\mathcal{X}$ が以下の操作で閉じている:

① shift

② extension

(i.e.) $X \to Y \to Z \to X[1]$, $X \in \mathcal{X}$, $Z \in \mathcal{X}$ $\Rightarrow Y \in \mathcal{X}$.

③ direct summand

$Y \in$ thick(X)

$\overset{iff}{\iff}$ $\exists Y' \in \mathcal{T}$, $\exists n_1, \dots, n_r \in \mathbb{Z}$

$\exists$ exact triangle

(s.t.)

$$0 = Y_0 \to Y_1 \to \cdots \to Y_r = Y \oplus Y'$$

$$X[n_1] \quad X[n_2] \quad X[n_r]$$

このとき,

Y_{i+1} = extension of Y_i & $X[n_{i+1}]$

つまり

$Y_1 = X[n_1]$

Y_2 : ext. of $X[n_1]$ & $X[n_2]$

Y_3 : ext. of Y_2 & $X[n_3]$

⋮

$Y_r = Y \oplus Y'$: ext. of Y_{r-1} & $X[n_r]$

だから, Y_r は X の shift の $r-1$ 回拡大で得られる.

(c.f.) $(R, \mathfrak{m}, k)$: Artin

$Y \in \mathrm{mod}\, R$

$$0 = Y_0 \hookrightarrow Y_1 \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow Y_r = Y$$

$$0 \to Y_i \to Y_{i+1} \to k \to 0$$

$X, Y \in \mathcal{T}$, $t \in \mathbb{R}$ として

$$\delta_t(X, Y) := \mathrm{Inf}\left\{ \sum e^{n_i t} \;\middle|\; \exists\, 0 = Y_0 \to Y_1 \to \cdots \to Y_r = Y \oplus Y' \quad X[n_1] \;\cdots\cdots\; X[n_{r-1}] \right\}$$

とおく. $t=0$ のときは $\delta_t(X, Y) = r$ なので, これは X から Y を拡大で作るのに必要な拡大の回数 $+1$ である.

(アルチン環の場合でいうと, Y の組成列の長さ $+1$ なので, ある種で長さの一般化)

ただし, $Y \notin \mathrm{thick}(X)$ なら $\delta_t(X,Y) = \infty$.

$\mathrm{thick}(X) = \mathcal{T}$ となっているとき,

$$h_t^{\mathcal{T}}(\Phi) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \delta_t(X, \Phi^n(X))$$

[DHKK] で保障

これは X の取り方に依存せず, $h_t^{\mathcal{T}}(\Phi) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ である. □

$K^b_{fl}(R) := \{ X \in K^b(R) \mid H_n(X) : \text{finite length for } {}^\forall n \in \mathbb{Z} \}$

$D^b_{fl}(R) := \{ X \in D^b(R) \mid H_n(X) : \text{finite length for } {}^\forall n \in \mathbb{Z} \}$

Theorem [MZM '19]

$$h_t^{K^b_{fl}(R)}(F^*) = h_{loc}(F) = \text{kr-dim}(R) \log p$$ □

一般に一致しない. 生成元の取り方が違う.

	[MZM]	(easy)
F^*	$K^b_{fl}(R)$ 上	$K^b(R)$ 上 $=0$
F_*	(easy) $D^b_{fl}(R)$ 上 $\| 0$	Main result

Main theorem

(R, m, k) が set up & Assmp. を満たすとする.

このとき,

$$h_t^{D^b(R)}(F_*) = h_{loc}(F) = \text{kr-dim}(R) \cdot \log p.$$

Corollary

$h_t^{D^b(R)}(F_*) = \text{constant}.$

Remark

$K^b_{fl}(R)$, $K^b_{fl}(R)$, $D^b_{fl}(R)$ の場合は $\mathcal{T}$ の生成元が具体的にとれる.

一方, $D^b(R)$ の場合は具体的には明示できないので, 帰納法を用いる.