ファイバー曲面のモジュラー不変量について（榎園・立教大）

§1 Introduction.

"Goal" = 代数多様体の分類

(e.g.) S : smooth projective surface $/ k = \mathbb{C}$.

Sが与えられたとき，
$$R(S) := \bigoplus_{n \geq 0} H^0(S, nK_S) \cdots \left(\begin{array}{l} S \overset{\text{birat}}{\simeq} S' \ \text{: smooth prj. var} \\ \Rightarrow R(S) \simeq R(S') \end{array} \right)$$
なる cannonical ring が定める．
$$\kappa(S) := \begin{cases} \dim R(S) - 1 & \text{if } \exists n > 0 \text{ (s.t.) } H^0(S, nK_S) \neq 0, \\ -\infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

Sが代数曲面のとき，$\kappa(S) = -\infty, \underbrace{0, 1, 2}$ である．
$\kappa(S)$ は Kodaira-dim と呼ばれる． ($S \longrightarrow \bar{S} := \mathrm{Proj}\, R(S)$ が定まり，$\kappa(S)$ は $\bar{S}$ の次元．)

(e.g.)
$$\kappa(S) = \begin{cases} -\infty & \cdots \quad \mathbb{P}^2_k \\ 0 & \cdots \quad \text{Abel曲面，} K_3\text{曲面} \\ 1 \\ 2 \end{cases}$$
Enrignes - Kodaira の分類定理

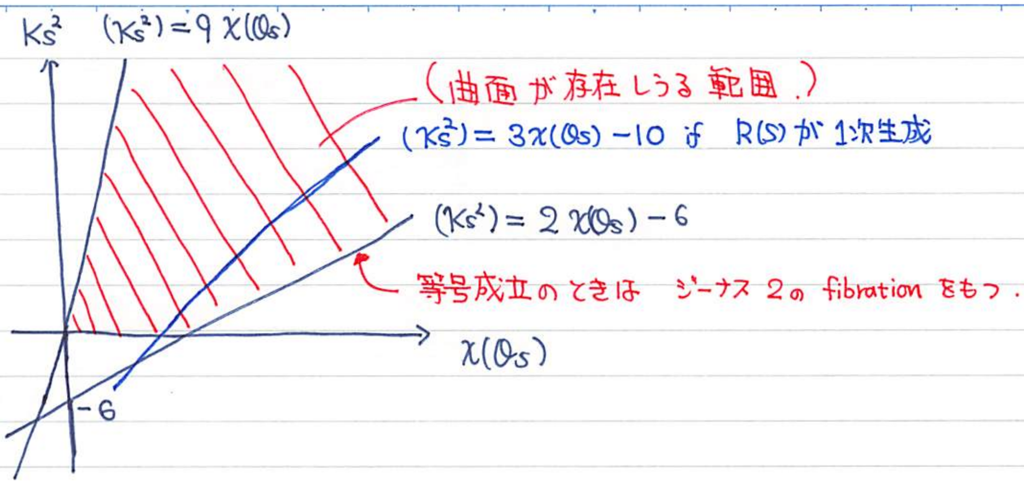
$\kappa(S) = 1$のときは　$S \longrightarrow \bar{S}$ は ジーナス1の fibration になっている．
$\kappa(S) = 2$のときは　$S \longrightarrow \bar{S}$ は birational である． ←

$$\begin{array}{ccc} S & \longrightarrow & \bar{S} \text{ : cannonical model.} \\ & \searrow_{\text{ブローダウン}} & \nearrow \\ & & S_n \text{ : minimal model} \end{array}$$

Question
$\kappa(S) = 2$ の曲面はどのように分類すればよいか？

- Invariants.
  S : minimal とする．
  - K_S^2 : 自己交点数
  - $\chi(\mathcal{O}_S) := \underbrace{h^0(\mathcal{O}_S)}_{\substack{\parallel \\ 1}} - \underbrace{h^1(\mathcal{O}_S)}_{q(S)} + \underbrace{h^2(\mathcal{O}_S)}_{p_g(S)} \in \mathbb{Z}_{>0}$

$\rightsquigarrow$
- $K_S^2 \geq 2\chi(\mathcal{O}_S) - 6$ (Noether の不等式)
- $K_S^2 \leq 9\chi(\mathcal{O}_S)$ (Miyaoka - Yau の不等式)

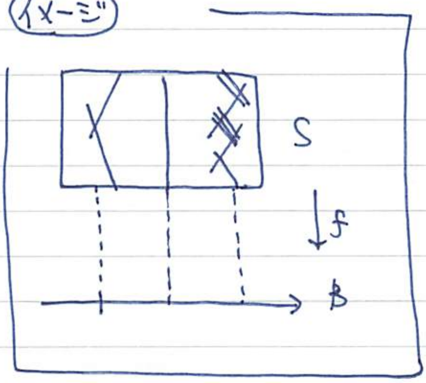


Definition

$f : S \to B$ が genus g の fibered surface $(g \geq 2)$

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$
- S : smooth proj. surface
- B : smooth proj. curve.
- f : surjective morphism (s.t.) $f^{-1}(t)$ は有限個を除いて genus g の smooth proj. curve

(イメージ)



$$K_f := K_S - f^* K_B$$

- K_f^2, $\chi_f := \deg f_*(K_f)$, $\lambda_f := \dfrac{K_f^2}{\chi_f}$

ここで λ_f は f の slope という.
このとき slope 不等式

$$\frac{4(g-1)}{g} \leq \lambda_f \leq 12$$

が成り立つ.

slope不等式の $\boxed{\text{等号成立}}$ するならば, F : general fiber は hyper elliptic.
つまり,

$\exists$ double cover $F \longrightarrow \mathbb{P}^1$.

- $g=2$ のとき, $\lambda_f \geq 2$ ($\Longleftrightarrow K_S^2 \geq 2\chi(\mathcal{O}_S)-6$)

- $g=3$ のとき, F : hyperell $\Rightarrow \lambda_f \geq \frac{8}{3}$
  F : not hyperell $\Rightarrow \lambda_f \geq 3$

⋮

- $g=5$ のとき, F : non-trigonal $\Rightarrow \lambda_f \geq 4$

- $g \geq 6$ はあまり良く知られていない.

Conjecture
① $g=10$, $F \not\approx$ limit of K3 $\Rightarrow \lambda_f \geq 5$?
② もし, Fが"general"ならば, $\lambda_f \geqq 6-\varepsilon_g$ for some $\varepsilon_g > 0$ ($\varepsilon_g \to 0$, $g \to \infty$)

これらの不等式を出すには2通りのアプローチがある.
(I) 曲面論を用いる.
(メリット) : non-semistable fiber も扱える.
(デメリット) : case-by-case で扱うしかない.

(II) 曲線のモジュライ空間の理論を用いる. (stable curve のモジュライ M_gのコンパクト化)
(メリット) : 一般性がある.
(デメリット) : semi-stable な case のみ扱える.

Today : $\overline{M}_g$ をより広げて, 一般的に non-semistable なものも考える.
$\rightsquigarrow$ moduli stack として考えないといけない.
non-separated となる.

§2 moduli of curves / $k=\bar{k}$

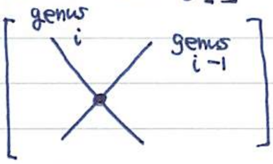
$\overline{M}_g$: moduli of stable curve of genus $g \geq 2$.

$\cup_{\text{open dense}}$ ⇝ $3g-3$ 次元 & projective

M_g : moduli of smooth proj. curve of genus g

⇝ $\overline{M}_g \setminus M_g = \delta_0 \cup \delta_1 \cup \cdots \cup \delta_{[\frac{g}{2}]}$: 既約分解

・ $\delta_i \ni$



$(i \geq 1)$

・ $\delta_0 \ni$

・ $\operatorname{codim} \delta_i = 1$

・ $\delta_i \in \operatorname{Pic}(\overline{M}_g)$. ←(δ_1のみ 考慮する必要がある)

Fact [Harer]

$\operatorname{Pic}(\overline{M}_g)_{\mathbb{Q}}$ $(g \geq 3)$ は $\delta_0, \cdots, \delta_{[\frac{g}{2}]}$ と Hodge class λ で生成されていて,
$\mathbb{Q}$上のベクトル空間の基底となる.

κ : 1st Morita-Mumford class $\in \operatorname{Pic}(\overline{M}_g)$ とすれば,

$$12\lambda = \kappa + \sum_i \delta_i$$

が成立する. (Noether の公式)

$f: S \longrightarrow B$: stable fibered surface of genus g に対して

$$\begin{array}{rccc} \rho_f : & B & \longrightarrow & \overline{M}_g \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & t & \longmapsto & [f^{-1}(t)] \end{array} \quad : \text{moduli map}$$

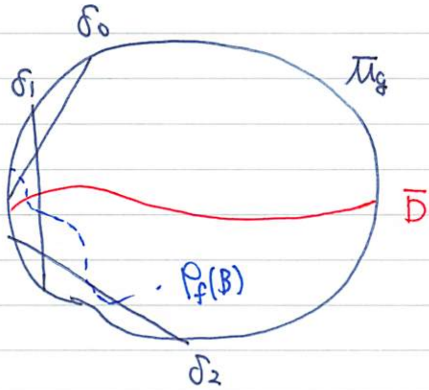
が得られて, $K_f^2 = \deg \rho_f^* \kappa$, $\chi_f = \deg \rho_f^* \lambda$.

D : codim locus on M_g.
(e.g. $D = \{$hyper ell. curves & genus $= 3\} \subseteq \mathcal{M}_3$)

$\rightsquigarrow \overline{D} = a\lambda - \sum_{i=0}^{[\frac{g}{2}]} b_i \delta_i$ for some $a, b_i > 0$ in $\mathrm{Pic}(\overline{\mathcal{M}}_g)_{\mathbb{Q}}$.

$b_i := \min_i \{b_i\}$, $SD := \frac{a}{b}$ (slope of D と呼ばれる) とする.

$$\begin{aligned} \kappa - (12 - SD)\lambda &\overset{\text{Noeth}}{=} -\delta + SD \cdot \lambda \qquad (\delta := \textstyle\sum \delta_i) \\ &= -\delta + \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{1}{a}(\overline{D} + \textstyle\sum b_i\delta_i) \right) \\ &= \frac{1}{b}\left(\overline{D} + \textstyle\sum (b_i - b)\delta_i\right) \geq 0 . \end{aligned}$$



$f : S \longrightarrow B$: stable fibered surf

$\rightsquigarrow$ gen. fib $F \notin D$
general condition

$\rightsquigarrow K_f^2 - (12 - SD)\chi_f$
$= \deg \rho_f^*\left(\frac{1}{b}\left(\overline{D} + \sum (b_i - b)\delta_i\right)\right)$
≥ 0.

∴ $\lambda_f \geq 12 - SD$.

Main result.
$f : S \longrightarrow B$: rel. min fibered surfaced of genus g.
gen. fiber $F \notin D$.
任意の fiber $f^{-1}(t)$ が reduced とする.
このとき,
$$\lambda_f \geq 12 - SD .$$

(複園)

§3 Sketch of proof

Step 1 $\mathcal{M}_g^*$: the moduli stack of curves C of genus g.
with
- C : reduced & local complete intersection
- $\omega_C^{\otimes 3}$: very ample

$\longrightarrow$ non-separated Artin stack

$$\mathcal{M}_g \subsetneq \overline{\mathcal{M}}_g \underset{\text{open dense}}{\subseteq} \mathcal{M}_g^*$$

(s.t.) $\operatorname{codim}(\mathcal{M}_g^* \setminus \overline{\mathcal{M}}_g) \geq 2$.

これを示すのに，reducedが必要．

$$\rightsquigarrow \quad Cl(\mathcal{M}_g^*)_{\mathbb{Q}} = Cl(\overline{\mathcal{M}}_g)_{\mathbb{Q}} = \operatorname{Pic}(\overline{\mathcal{M}}_g)_{\mathbb{Q}}.$$