

トロピカル超体の拡張と多項式の零点集合について

小田切 真 輔*・佐 藤 宏 平

On modified tropical hyperfield and the zero sets of polynomials

Shinsuke ODAGIRI* and Kohei SATO

(平成28年11月29日受理)

Tropical hyperfield is a triple which consists of complex numbers, tropical addition and usual multiplication. We modify this hyperfield so that the resulting set endowed with the addition and the multiplication is doubly distributive. Moreover, we show that the modified tropical hyperfield is "algebraically closed".

1. 導入

(複素)トロピカル超体とは Oleg Viro が [4] の中で提唱しているもので、複素数全体の集合にトロピカル和と通常の積を定義したもののことである。

本紙は、現在までに行ったトロピカル超体の拡張と、その上の多項式における根の様子についての考察をまとめたものである。

2. トロピカル超体

本節では多値環から超環および超体を定義し、その後、トロピカル超体を定義する。超環および超体は付値環との関連から Krasner [1, 2] によって定義され、その後様々な分野との関連が見つかっている [5]。一方、多値環は独立に Marshall [3] により考えられた。

2.1. 超体

定義2.1 (多値環, 超環). 空でない集合 X に対し、多値二項演算 $+: X \times X \rightarrow 2^X \setminus \{\emptyset\}$, 二項演算 $\cdot: X \times X \rightarrow X$, 写像 $-: X \rightarrow X$ および $0, 1 \in X$ が存在し、次の条件を満たすとする。

- $(X, +, -, 0)$ は自明な超群である、すなわち任意の $x, y, z \in X$ は次を満たす。

$$(M1) \quad z \in x + y \Rightarrow x \in z + (-y)$$

$$(M2) \quad x = y \Leftrightarrow x \in y + 0$$

$$(M3) \quad (x + y) + z = x + (y + z)$$

$$(M4) \quad x + y = y + x$$

- $(X, \cdot, 1)$ は可換モノイドである、すなわち任意の $x, y, z \in X$ は次を満たす。

$$(M5) \quad xy = yx$$

$$(M6) \quad (xy)z = x(yz)$$

$$(M7) \quad 1x = x$$

- 任意の $x, y, z \in X$ は次を満たす。

$$(M8) \quad 0x = 0$$

$$(M9) \quad x(y + z) \subset xy + xz$$

このとき $X = (X, +, \cdot, -, 0, 1)$ は可換多値環であるという。さらに任意の $x, y, z \in X$ が次も満たすとき、 X は可換超環であるという。

$$(M10) \quad xy + xz \subset x(y + z)$$

定義2.2 (標数). 多値環 X に対し、

$$1 + 1 + \cdots + 1 \ni 0$$

となる最小の1の個数 n を X の標数といい $\text{char}(X)$ で表す。このような2以上の整数 n が存在しないとき、標数0という。

定義2.3 (超体). 多値環 X は、 $0 \neq 1$ であり、その部分集合 $X \setminus \{0\}$ が乗法 \cdot について可換群を成すとき、超体という。

* 秀明大学学校教師学部

定理2.1 (M. Marshall [3]). 任意の超体は可換超環である.

2.2. トロピカル超体

複素平面上の原点を中心とする劣弧を単に弧と呼ぶことにし, $a, b \in C$ が $|a|=|b|$ かつ $a+b \neq 0$ であるとき, a, b を両端とする弧を \widehat{ab} と書く. また, 原点中心, 半径 r の閉円板を $D(r)$ と表す.

定義2.4 (トロピカル和). 任意の複素数 a, b に対して, **トロピカル和** $a \sim b$ を以下のように定義する.

$$a \sim b = \begin{cases} |a| & (|a| > |b|) \\ |b| & (|a| < |b|) \\ \widehat{ab} & (|a| = |b|, a+b \neq 0) \\ D(|a|) & (|a| = |b|, a+b = 0) \end{cases}$$

このトロピカル和は可換である. 即ち, 任意の $a, b \in C$ に対して, $a \sim b = b \sim a$ である.

定義2.5 (O. Viro [4]). 複素数の集合 C に, 演算としてトロピカル和 \sim と通常の乗法 \cdot を入れたもの (C, \sim, \cdot) は超体になる. これを(複素)トロピカル超体といい, \mathcal{TC} で表す.

注意2.1. $1 \sim 1 \sim \dots \sim 1 = \{1\}$ より $\text{char}(\mathcal{TC}) = 0$ である.

3. トロピカル超体上の多項式と根

トロピカル超体上では, 一般に, 単分配律 $a \cdot (b \sim c) = a \cdot b \sim a \cdot c$ は成り立つ. しかし, 次の例が示すように重分配律は成り立たない.

例3.1. $(1 \sim i)^2 = \{e^{i\theta} \mid 0 \leq \theta \leq \pi\}$ であるが, $1 \cdot 1 \sim 1 \cdot i \sim i \cdot 1 \sim i \cdot i = D(1)$.

これはトロピカル和として得られる C の部分集合 X, Y に対し $X \cdot Y$ が必ずしもトロピカル和として表せないことが原因であり, これにより多項式の扱いに不自然さが生じる. そこで, 次のような集合族と乗法を定め, この問題を解決する.

3.1. 笑顔集合族

定義3.1 集合族 S 以下のように定め, 笑顔集合族と呼ぶ.

$$S := \{a \sim b \mid a, b \in C\}$$

$A = a \sim b$ に対し, $r(A) := \max(|a|, |b|)$ を A の半径と呼ぶ.

注意3.1. 任意の $a \in C$ に対し, $|a| = a \sim a$ なので $|a| \in S$ であり,

$$S = \{|a| \mid a \in C\} \cup \{D(r) \mid r > 0\} \cup \{\widehat{ab} \mid |a| = |b|, a \neq b, a+b \neq 0\}$$

である.

次に, $A, B \in S$ に対して, **トロピカル和**を通常の拡張で定める:

$$A \sim B := \bigcup_{a \in A, b \in B} a \sim b$$

補題3.1. $A \sim B \in S, \forall A, B \in S$

証明 $r(A) > r(B)$ であれば $A \sim B = A \in S$ となる. $r(A) = r(B)$ の場合を考える. A, B のいずれかが閉円板のときは明らかなので, そうでないとする. もし A, B を両方含む開半弧が存在する場合は半弧の両端に近い $A \cup B$ の端点をそれぞれ e, f とすると $A \sim B = e \sim f \in S$ である. 開半弧が存在しない場合は $\{|a| \mid a \in A\} \cap B \neq \emptyset$ なので, $A \sim B = D(|A|) \in S$ である.

補題3.2. 演算 \sim は可換で結合律を満たす:

1. $A \sim B = B \sim A, \forall A, B \in S,$
2. $(A \sim B) \sim C = A \sim (B \sim C), \forall A, B, C \in S.$

証明 A, B, C の半径が等しい場合の結合律のみ示す(他は自明である). このとき A, B, C のいずれかが閉円板であれば, 和の順番に依らず $D(|A|)$ となる. すべて閉円板でないとして仮定する. このとき補題3.1の証明と同様に $A \cup B \cup C$ が開半弧に含まれるならば, 半弧の両端に近い $A \cup B \cup C$ の端点をそれぞれ e, f とすると和の順番に依らず $e \sim f$ となるので成り立つ. そうでない場合は A, B, C のトロピカル和は和の順番に依らず $A \cup B \cup C$ を含むので閉円板となる.

次に, S に積 \star を定める為に, まずは任意の C の部分集合 U に対して, 以下のような集合を考える.

定義3.2. 任意の集合 $U \subset C$ に対し, 集合 \widehat{U} を以下のように定義する.

$$\widehat{U} := U \sim U = \bigcup_{u_1, u_2 \in U} u_1 \sim u_2$$

補題3.3. 次が成り立つ.

1. 任意の $U \subset C$ に対し, $U \subset \widehat{U}$
2. 任意の $A \in S$ に対し, $A = \widehat{\widehat{A}}$

注意3.2. 一般に $U = \widehat{U}$ は成り立たない. たとえば $U = \{1, e^{2\pi i/3}, e^{4\pi i/3}\}$ とすると $\widehat{U} = \{u \mid |u| = 1\} \neq U$ である. さらに, $\widehat{\widehat{U}} = D(1)$ となるので, $\widehat{\widehat{\widehat{U}}} = \widehat{U}$ である.

次に, 笑顔集合族 S の任意の 2 元 A, B に対し, 以下のように積を定める.

$$A \star B := \widehat{A \cdot B}$$

補題3.4. $A \star B \in S, \forall A, B \in S.$

証明 A または B が一点または閉円板の場合は $A \cdot B \in S$ なので $A \star B \in S$ である. 以下 A, B がともに弧である場合のみ考える. $A = \{r_1 e^{i\theta} \mid r_1 > 0, \phi_1 \leq \theta \leq \phi_2\}$, $B = \{r_2 e^{i\theta} \mid r_2 > 0, \psi_1 \leq \theta \leq \psi_2\}$ とおく. このとき $A \cdot B = \{r_1 r_2 e^{i\theta} \mid \phi_1 + \psi_1 \leq \theta \leq \phi_2 + \psi_2\}$ であり, $\phi_2 + \psi_2 - \phi_1 - \psi_1 < \pi$ のときは, 弧なので S の元である. そうでない場合 $A \cdot B$ は原点对称な 2 点 $r_1 r_2 e^{i(\phi_1 + \psi_2)}$ と $r_1 r_2 e^{i(\phi_2 + \psi_1)}$ を含むので $A \star B$ は円板 $D(r_1 r_2)$ となる.

この積を **トロピカル積** と呼ぶ. トロピカル積はトロピカル和と同様に可換かつ結合律を満たす (証明も同様である).

以上で S の中に加法 $+$ と乗法 \star が定義された. 加法は単位元 $0_S = \{0\}$ を持つ可換モノイドであり, 乗法も単位元 $1_S = \{1\}$ を持つ可換モノイドである.

補題3.5. $(S, +, \star)$ は分配的である:

$$A \star (B + C) = A \star B + A \star C, \forall A, B, C \in S.$$

証明 略 ($r(B) = r(C)$ の場合のみ示せば良く, $B \cup C$ が開半弧に含まれる場合とそうでない場合に場合分けをする).

命題3.1. $(S, +, \star)$ は可換半環になる.

C の元 a と S の元 $|a|$ を同一視することで, C に多値和 $+$ および積 \star が入った組 $\text{Tr}C := (C, +, \star)$ を考える. このとき一般に

$$(a + b) \star (c + d) = \bigcup_{\substack{x \in a + b \\ y \in c + d}} x \star y$$

なので, 通常の意味では超体とは言えない. しかし

$\text{Tr}C$ は $\mathcal{T}C$ と異なり重分配的である.

命題3.2. 任意の $a_1, a_2, b_1, b_2 \in C$ は次を満たす:

$$(a_1 - a_2) \star (b_1 - b_2) = a_1 b_1 - a_1 b_2 - a_2 b_1 - a_2 b_2.$$

証明 $A = a_1 - a_2, B = b_1 - b_2$ とおく. A または B が一点の場合はトロピカル超体において単分配律が成り立つことより言える. $a_2 = -a_1$ のときは $A \star B = D(|A||B|)$ であるが, $a_1 b_1 - a_1 b_2 - a_2 b_1 - a_2 b_2 = a_1 b_1 - a_1 b_2 - (-a_1 b_1) - (-a_1 b_2) = D(|A||B|)$ なので成り立つ.

$a_1 = r_1 e^{i\phi_1}, a_2 = r_1 e^{i\phi_2}, b_1 = r_2 e^{i\psi_1}, b_2 = r_2 e^{i\psi_2}$ (ただし $r_1, r_2 > 0, 0 \leq \phi_2 - \phi_1 < \pi, 0 \leq \psi_2 - \psi_1 < \pi$) とする. もし $\phi_2 + \psi_2 - \phi_1 - \psi_1 < \pi$ であれば $a_1 b_1, a_2 b_2$ を両端とする弧に $a_1 b_2, a_2 b_1$ はともに含まれるので $A \cdot B = a_1 b_1 - a_2 b_2 \in S$ である. そうでなければ $\psi_3 := \phi_1 + \psi_1 - \phi_2 + \pi \leq \psi_2, b_3 := r_2 e^{i\psi_3}$ とおくと $b_3 \in B$ であり, $a_2 b_3 = -a_1 b_1$ なので $A \cdot B \ni a_1 b_1, -a_1 b_1$ である. 従って $A \star B = D(|A||B|)$ である. 一方, $a_1 b_1, a_1 b_2, a_2 b_1, a_2 b_2$ は A, B がともに劣弧であることから 4 点のどの点を始点とする正方向の半弧を考えても 4 点全てが含まれることはない. 従って $a_1 b_1 - a_1 b_2 - a_2 b_1 - a_2 b_2 = D(|A||B|)$ である.

3.2. $\text{Tr}C$ 上の多項式

前節では, $\mathcal{T}C$ の乗法をトロピカル積 \star に置き換えた $\text{Tr}C$ は, 重分配的であることを示した. 以下, $\text{Tr}C$ 上の多項式を考えよう.

$$R := \text{Tr}C[x_1, x_2, \dots, x_n]$$

トロピカル超体 $\text{Tr}C$ 上で多項式の展開はできるが, 任意の多項式が因数分解できるとは限らない.

例3.2. 任意の自然数 $n \geq 2$ に対し, $f = x^n - 1$ を考える. $f = g_1 \dots g_N$ と因数分解できたとしよう. $g_1(0) \dots g_N(0) = f(0) = 1$ より, g_1, \dots, g_N はいずれも定数項が存在し, その積は 1 である. g_1, \dots, g_N の最高次の係数を全て掛けると 1 となることから, 各 g_i について最高次の係数でくくり出すことにより, 以下 g_1, \dots, g_N はすべて monic と仮定して良い. このとき $r(f(1)) = r(g_1(1)) \dots r(g_N(1))$ であることから $r(g_i(1)) = 1$ である. 従って g_i の全ての係数の絶対値は 1 以下であり, 定数項をすべて掛けると 1 になることから特に定数項の絶対値は 1 である. 更に $f(1)$ が一点 1 であることから $g_1(1), \dots, g_N(1)$ も一点 1 である. 従って定数項はすべて 1 である.

$\zeta = e^{2\pi i/n}$ とおく. このとき $f(\zeta)$ が一点 1 であることから $g_i(\zeta)$ も一点でなくてはならない. しかし $g_i(\zeta)$ は点 $e^{2\pi i \deg(g_i)/n}$, 1 を含む. よって矛盾.
以上より, f は既約多項式である.

定義3.3. $f \in R$ に対し, f の零点集合を以下で定める.

$$Z(f) := \{x \in C^n \mid f(x) \ni 0\}$$

定理3.1. 任意の $f \in \text{Tr}C[x]$ に対し, $f(z) \ni 0$ となる $z \in C$ が存在する.

証明 $f(x)$ に定数項が存在しない場合は, $f(0) = 0$ より主張は成り立つ. よって, $f(x)$ に定数項 c が存在する場合を考える.

ここで, $g(x)$ を $f(x)$ の定数項以外からなる多項式とする. このとき, $|g(a)| = |c|$ を満たす実数 $a > 0$ が取れる. 実数 a に対し, $g(a \cdot e^{i\epsilon}) \ni -c$ を満たす実数 ϵ が存在する. よって, $f(a \cdot e^{i\epsilon}) \ni 0$ となる.

系3.1. R の任意の定数でない元に対し, その零点集合は空でない.

系3.2. $\text{Tr}C$ は “代数的閉” である.

参考文献

- [1] M. Krasner, “Approximation des corps valués complets de caractéristique $p \neq 0$ par ceux de caractéristique 0”, Colloque d’Algebre Supérieure, pp.129-206, 1957
- [2] M. Krasner, “A class of hyperrings and hyperfields”, Internat. J. Math. and Math. Sci., Vol.6, pp.307-312, 1983
- [3] M. Marshall, “Real reduced multirings and multifields”, J. Pure Appl. Algebra, Vol.205-2, pp.452-468, 2006
- [4] O. Viro, “Hyperfields for Tropical Geometry I. Hyperfields and dequantization”, available at arXiv:1006.3034
- [5] P. Gładki, “A survey on multirings, hyperrings and hyperfields”, available at <http://www.math.us.edu.pl/~pgladki/>