講演の概要・目的 (1/2)

下の論文 [1] の主結果を紹介する.
そのために必要な, 次の概念について解説する:

- (ピカール数 1 の) Du Val del Pezzo 曲面.
- 非代数閉体上に定義された Du Val 特異点 (の singularity type).

[1] M. Sawahara,
Cylinders in canonical del Pezzo fibrations,
Annales de l'Institut Fourier (to appear), arXiv:2012.10062v2.

[2] M. Sawahara,
Compactifications of the affine plane over non-closed fields,
Pacific Journal of Mathematics (to appear), arXiv:2107.08730v4.

講演の概要・目的 (2/2)

「**ピカール数**」とは? 「**Du Val del Pezzo 曲面**」とは?

- ちゃんと説明しようとすると, 大変… ← 代数幾何学の知識が必須
- 代数幾何学の知識を (極力) 仮定せず, **代数曲面論の初歩**を俯瞰し, 雰囲気にウエイトを置きながら説明する.

「**非代数閉体上に定義された Du Val 特異点** (の singularity type)」とは?

- 講演者が (勝手に) 導入した概念.
- もしかしたら, 他分野 (数論・表現論) で使い道があるかも…?

1

双有理同値

(代数) 幾何学の重要な問題: 『**(代数) 多様体を同型を除いて分類せよ.**』

※代数多様体は "同型" と見做すための条件が厳しい.
⇝ そこで, **双有理同値**を除いて分類する事を考える.

Definition.
X, Y: 代数多様体 $/k$: 体.

- X と Y が双有理同値
  $\underset{def.}{\iff}$ $X \supseteq \exists U$: open & $Y \supseteq \exists V$: open s.t. $U \simeq V$.

Question.
X: 良い性質をもつ射影代数多様体 $/k$: 完全体.
このとき, X と双有理同値で "これ以上シンプルにできない" 射影代数多様体を見つけよ.
注) 非特異ならば, "良い性質" を充たしている.

極小な正規射影代数多様体

Definition.
$f : X \to Y$; 射影代数多様体間の射 $/k$: 完全体.

- f; 双有理射
  $\underset{def.}{\iff}$ $X \supseteq \exists U$: open & $Y \supseteq \exists V$: open s.t.
  $f(U) \subseteq V$, moreover, $f|_U : U \to V$; 同型射.

Definition.
X: "非特異" 射影代数曲面 $/k$: 完全体.

- X: 極小
  $\underset{def.}{\iff}$ $\forall f : X \to Y$; "非特異" 射影代数曲面間の双有理射について, f; 同型射.

Remark.
上の極小の定義は, 3 次元以上だと正しくない. ← 要, 微修正

極小モデルプログラム (MMP)

Theorem. (2 次元極小モデルプログラム)
X: 非特異射影代数曲面 $/k$: 完全体.
このとき, $\exists X \to X'$; 双有理射 s.t. X': 極小.

Remark.
$\dim X \geq 3$ だと一般に成立しない. (高次元の場合には, 改良が必要)

Fact.
上の *Theorem* での X' は次のいずれか (定義は *Kollár-Mori* を参照して下さい):

- 極小モデル.
- 森ファイバー空間.

※本講演では, X' が森ファイバー空間になるケースしか扱わない.

(2 次元の) 森ファイバー空間

X: 非特異射影代数曲面 $/k$: 完全体
with 森ファイバー空間の構造 $\pi : X \to Y$.
⇝ $2 = \dim X > \dim Y$, i.e., 低次元の代数多様体の考察に帰着できる.

- $\dim Y = 0$: X はピカール数 1 の非特異 del Pezzo 曲面.
- $\dim Y = 1$: π は森コニック束.
  I.e., $\forall y \in Y_{\overline{k}}$ について $\pi_{\overline{k}}^{-1}(y)$ は (既約とは限らない) 平面 2 次曲線と同型.

Example.

- $\mathbb{P}^2_k$: 射影平面 はピカール数 1 の非特異 del Pezzo 曲面.
  - 実は, k が代数閉体ならば, ピカール数 1 の非特異 del Pezzo 曲面は常に $\mathbb{P}^2_k$ と同型になる.
- $\pi := pr_1 : \mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k \to \mathbb{P}^1_k$ は森コニック束. 実際, $\forall y \in \mathbb{P}^1_{\overline{k}}$ について, $\pi_{\overline{k}}^{-1}(y) \simeq \mathbb{P}^1_{\overline{k}} \simeq$ 既約 (かつ被約) な平面 2 次曲線.

特異点のクラス

一般に, 良い性質をもつ射影代数多様体 X / k: 完全体 に対し,
食い違い係数という有理数値が定まる. (詳細は Kollár-Mori を読んで下さい)
このとき:

- 食い違い係数 > 0 のとき,
  X は高々端末特異点 (terminal 特異点) をもつという.
- 食い違い係数 ≥ 0 のとき,
  X は高々標準特異点 (canonical 特異点) をもつという.
- 食い違い係数 > -1 のとき,
  X は高々対数的端末特異点 (lt 特異点) をもつという.
- 食い違い係数 ≥ -1 のとき,
  X は高々対数的標準特異点 (lc 特異点) をもつという.

$\dim X = 2$, 且つ, X が高々lc 特異点をもつならば, MMP を実行できる.
I.e., $\exists X \to X'$; 双有理射 s.t. X': 極小. ← 極小の定義をし直す必要あり
その際, X' は "ピカール数 1 の del Pezzo 曲面" になり得る.

特異点のクラス (2 次元版)

Fact.
X: 良い性質をもつ射影代数曲面 $/k$: 標数 0 の体.

- X が高々端末特異点をもつ $\overset{iff}{\iff}$ $X_{\overline{k}}$: 非特異.
- X が高々標準特異点をもつ $\overset{iff}{\iff}$ $X_{\overline{k}}$: 高々**Du Val 特異点**をもつ.
- X が高々lt 特異点をもつ $\overset{iff}{\iff}$ $X_{\overline{k}}$: 高々(2 次元) 商特異点をもつ.

ここ迄のまとめ (『ピカール数 1 の Du Val del Pezzo 曲面』とは…?):

- 標準特異点クラスでの最もシンプルな射影代数曲面 (の 1 つ).

以下では, ピカール数 1 の Du Val del Pezzo 曲面を
(できる限り) きちんと定義する事を目指そう.

2

代数曲面論の初歩の入門

(少なくとも) 講演者にとって，
代数曲面の研究で重要と思われる概念は以下の通り：

- 双有理射 (ブローイングアップ・ブローイングダウン)
- 交叉数
- ネロン・セヴェリ群

そこで暫く，これらの概要を解説する．

Remark.

なるべく少ない知識で完結するようにした関係上，幾分ぎこちない定義の仕方をする場面がある事に留意されたい．

- 代数幾何学の一般論を展開すると見通しがスッキリするような定義もあるが，一般論を展開せずに定義する関係で「特殊なケースに限定して定義」したり「回りくどく定義したり」している箇所が所々ある．

暫く，基礎体 k は代数閉体とする．(標数は任意で良い)

重複度

$S = (S, \mathscr{O}_S)$: 非特異射影代数曲面，$x \in S$: 閉点．
$\rightsquigarrow$ 局所環 $(\mathscr{O}_{S,x}, \mathfrak{m}_{S,x})$ が定まる．
C: x を通る S 上の既約 (かつ被約) な曲線．
$\rightsquigarrow$ C は x の近傍では $f \in \mathscr{O}_{S,x}$ により定義されている．

Definition.

$f \in \mathfrak{m}^n_{S,x}$ かつ $f \notin \mathfrak{m}^{n+1}_{S,x}$ となる正整数 n を C の x における重複度といい，$\mu = \mu(C; x)$ で表す．

Fact.

$x \in C$ が非特異 $\overset{\text{iff}}{\Longleftrightarrow}$ $\mu(C; x) = 1$.

重複度の例

Example.

$S := \mathbb{P}^2_k$, $o := [0:0:1] \in \mathbb{P}^2_k$ とする．
$o \in \mathbb{P}^2_k$ の開近傍 $U := (z \neq 0) \simeq \mathbb{A}^2_k$ は，$k[x, y]$ に対応．
$\rightsquigarrow (\mathscr{O}_{S,o}, \mathfrak{m}_{S,o}) = (k[x,y]_{(x,y)}, (x,y)k[x,y]_{(x,y)})$, i.e.:

$$\mathscr{O}_{S,o} = \left\{ \frac{f}{g} \mid f \in k[x,y],\ g \in k[x,y] \setminus \{0\},\ g \notin (x,y) \right\},$$

$$\mathfrak{m}_{S,o} = \left\{ \frac{f}{g} \mid f \in k[x,y],\ g \in k[x,y] \setminus \{0\},\ f \in (x,y),\ g \notin (x,y) \right\}.$$

❶ $C_1 := (x = 0) \subseteq \mathbb{P}^2_k$ に対し，U 内での定義式は $x = \frac{x}{1} \in \mathfrak{m}_{S,o} \setminus \mathfrak{m}^2_{S,o}$.
$\therefore\ \mu(C_1; o) = 1$.

❷ $C_2 := (x^3 - y^2 z = 0) \subseteq \mathbb{P}^2_k$ に対し，U 内での定義式は
$x^3 - y^2 = \frac{x^3 - y^2}{1} \in \mathfrak{m}^2_{S,o} \setminus \mathfrak{m}^3_{S,o}$.
$\therefore\ \mu(C_2; o) = 2$.

1点ブローイングアップ

Definition.

$\mathbb{A}^n_k$: n 次元アフィン空間，$o \in \mathbb{A}^n_k$: 原点．
$pr_1 : \mathbb{A}^n_k \times \mathbb{P}^{n-1}_k \to \mathbb{A}^n_k$; 第1成分への射影．
このとき：

$$V := \{(x_1, \ldots, x_n) \times [y_1 : \ldots : y_n] \mid x_i y_j - x_j y_i = 0\ (1 \leq i < j \leq n)\} \subseteq \mathbb{A}^n_k \times \mathbb{P}^{n-1}_k$$

に対し，射 $pr_1|_V : V \to \mathbb{A}^n_k$ を原点 $o \in \mathbb{A}^n_k$ のブローイングアップという．

Definition.

S: 非特異射影代数曲面，$x \in S$: 閉点．$U \subseteq S$: x のアフィン開近傍．
$\rightsquigarrow U \simeq \exists U' \subseteq \mathbb{A}^n_k$: closed s.t. $x \in U$ が $o \in U' \subseteq \mathbb{A}^n_k$ に対応．
$\rho : V \to \mathbb{A}^n_k$; $o \in \mathbb{A}^n_k$ のブローイングアップ，
$\widetilde{V} := \overline{\rho^{-1}(U' \setminus \{o\})} \subseteq \rho^{-1}(U')$.　$\leftarrow \rho^{-1}(U')$ の subset とみたときの closure
このとき，$\rho|_{\widetilde{V}} : \widetilde{V} \to U'$ と $id : S \setminus U \to S \setminus U$ を貼り合わせる事で，
非特異射影代数曲面間の射 $\pi : \widetilde{S} \to S$ を得る．
この π を S の x を中心としたブローイングアップという．

自己交叉数

$S := S_r \xrightarrow{\pi} S_{r-1} \cdots \to S_1 \to S_0 := \mathbb{P}^2_k$: 1点ブローイングアップの合成，
C: S 上の既約 (かつ被約) な曲線．

Definition.

C の自己交叉数 $(C)^2$ を次のように定める：

- ($r = 0$ のとき)
  $\exists d \in \mathbb{Z}_{>0}$ s.t. $C \subseteq \mathbb{P}^2_k$: d 次曲線．そこで，$(C)^2 := d^2$ で定義する．
- ($r > 0$ で $r - 1$ まで定義されているとき)
  $x \in S_{r-1}$: ブローイングアップする最後の点．
  - $\pi(C)$ が曲線ならば，$(C)^2 := (\pi(C))^2 - \mu(\pi(C); x)^2$ で定義する．
    (但し，$\pi(C)$ は被約なものを考える．)
  - $\pi(C)$ が点ならば，$(C)^2 := -1$ で定義する．

Definition.

$n \in \mathbb{Z}$ に対し：

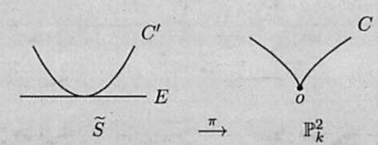
- C: n-曲線 $\underset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ $C \simeq \mathbb{P}^1_k$, 且つ，$(C)^2 = n$.

自己交叉数の例

Example.

$S := \mathbb{P}^2_k$, $C := (x^3 - y^2 z = 0) \subseteq \mathbb{P}^2_k$ とする．

- C は3次曲線ゆえ，$(C)^2 = 3^2 = 9$.
- $\pi : \widetilde{S} \to S$; 点 $o := [0:0:1] \in \mathbb{P}^2_k$ を中心としたブローイングアップ．
  - $C' := \overline{\pi^{-1}(C \setminus \{o\})} \subseteq \widetilde{S}$ に対し，$\pi(C') = C$ ゆえ，
    $(C')^2 = (C)^2 - \mu(C; o)^2 = 9 - 2^2 = 5$.
  - $E := \pi^{-1}(\{o\})$ に対し，$\pi(E) = \{o\}$ ゆえ，$(E)^2 = -1$.



Blowing-up の性質 (1/2) ／双有理射の分解定理

Fact.

S: 非特異射影代数曲面，$x \in S$: 閉点．
$\pi : \widetilde{S} \to S$; x を中心としたブローイングアップ，
$E := \pi^{-1}(\{x\})$ とおく．(E を π の例外曲線という)
このとき，$\pi|_{\widetilde{S} \setminus E} : \widetilde{S} \setminus E \to S \setminus \{x\}$; 同型射．特に，$\pi$ は双有理射．

Theorem. (双有理射の分解定理)

非特異射影代数曲面間の双有理射は，
(有限個の) 閉点を中心としたブローイングアップに分解できる．

Blowing-up の性質 (2/2) ／ブローイングダウン (収縮)

Fact.

S: 非特異射影代数曲面 (with $\exists S \to \mathbb{P}^2_k$; 双有理射)，$x \in S$: 閉点．
$\pi : \widetilde{S} \to S$; x を中心としたブローイングアップ．
このとき，π の (被約) 例外曲線 E は既約な曲線，moreover, E: (-1)-曲線．

Theorem. (Castelnuovo の可縮性判定条件)

S: 非特異射影代数曲面 (with $\exists S \to \mathbb{P}^2_k$; 双有理射)，$E \subseteq S$: (-1)-曲線．
このとき，$\exists \pi : S \to \widetilde{S}$; 双有理射 s.t. $x := \pi(E)$: $\widetilde{S}$ 上の非特異点，且つ，
π は x を中心としたブロイングーアップと見做せる．
この π を，E の収縮またはブローイングダウンという．

Remark.

実は，"$\exists S \to \mathbb{P}^2_k$; 双有理射" という仮定は両方とも外せる．

- その際，自己交叉数を定義し直す必要あり．

以降のスライドでも，同様に上述の仮定を外す事ができる．

(曲線同士の) 交叉数

Definition.

S: 非特異射影代数曲面 (with $\exists S \to \mathbb{P}^2_k$; 双有理射)，
C_1, C_2: S 上の既約 (かつ被約) な曲線．
このとき，C_1 と C_2 の交叉数 $(C_1 \cdot C_2)$ を次で定める：

- ($C_1 = C_2$ のとき)
  $(C_1 \cdot C_2) := (C_1)^2$ で定義する．
- ($C_1 \neq C_2$ のとき)
  $(C_1 \cdot C_2) :=$ (C_1 と C_2 が交叉している個数) で定める．
  注) 但し，例えば2重に交叉している場合は，2個分交叉していると考える．

3

(因子同士の) 交叉数

Definition.

S: 非特異射影代数曲面 (*with* $\exists S \to \mathbb{P}^2_k$; 双有理射).

❶ S 上の各既約 (かつ被約) な閉部分曲線を基底とする自由 $\mathbb{Z}$-加群を $\mathrm{Div}(S)$ で表す. $\mathrm{Div}(S)$ の元を S 上の因子という.

❷ $D_1 = \sum_{i=1}^m a_i D_{1,i}, D_2 = \sum_{j=1}^n b_j D_{2,j} \in \mathrm{Div}(S)$ に対し:

$$(D_1 \cdot D_2) := \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_i b_j (D_{1,i} \cdot D_{2,j})$$

を D_1 と D_2 の交叉数という.

ネロン・セヴェリ群

Definition.

S: 非特異射影代数曲面 (*with* $\exists S \to \mathbb{P}^2_k$; 双有理射).

❶ $D_1, D_2 \in \mathrm{Div}(S)$ に対し,
$D_1 \equiv D_2 \overset{}{\underset{def.}{\iff}} (D_1 \cdot D) = (D_2 \cdot D)$ *for* $\forall D \in \mathrm{Div}(S)$.

❷ $\equiv$ は同値関係ゆえ, 商集合 $\mathrm{NS}(S) := \mathrm{Div}(S)/\equiv$ が定まる.
このとき, $\mathrm{NS}(S)$ には自然に $\mathbb{Z}$-加群の構造が定まる.
これをネロン・セヴェリ群という.

Remark.

$\mathrm{NS}(S)$ の元を, 単に因子といって, $\mathrm{Div}(S)$ の元のように扱う事が多い.

ピカール数

S: 非特異射影代数曲面 (with $\exists S \to \mathbb{P}^2_k$; 双有理射).

Fact.

$\mathrm{NS}(S) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^{\oplus r}$.

Definition.

$\rho_k(S) := \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{NS}(S) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ を S のピカール数という.

Fact.

❶ $\mathrm{NS}(\mathbb{P}^2_k) = \mathbb{Z}L$ (L は $\mathbb{P}^2_k$ の直線). 特に, $\rho_k(\mathbb{P}^2_k) = 1$.

❷ S: 非特異射影代数曲面 (*with* $\exists S \to \mathbb{P}^2_k$; 双有理射),
$\pi : S' \to S$; 1点ブローイングアップ, E: π の (被約) 例外曲線.
このとき, $\mathrm{NS}(S') = \mathrm{NS}(S) \oplus \mathbb{Z}E$. 特に, $\rho_k(S') = \rho_k(S) + 1$.

係数拡大

以下, k は標数 0 の**代数閉体とは限らない**体とする.
$\overline{k}$: k の代数閉包, X: k 上に定義された代数多様体.

Definition.

$X_{\overline{k}} := X \otimes_k \overline{k}$. $\leftarrow$ これは, $\overline{k}$ 上に定義された代数多様体

Example.

$C := (x^2 + y^2 + z^2 = 0) \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ を考える.

- 集合として, $C = \{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \mid x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$.

$\to$ $C_{\mathbb{C}} = \{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \mid x^2 + y^2 + z^2 = 0\} \simeq \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$. $\leftarrow$ well-known !!

- 然るに, $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ を充たす $[x : y : z] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ は存在しないので,
$C \not\simeq \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$.

Galois 群作用

Fact.

- $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k) \curvearrowright X_{\overline{k}}$.
- $X_{\overline{k}} \supseteq Y$: 閉 (*or* 開) 部分集合に対し,
Y が k 上に定義されている $\overset{iff}{\iff}$ $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k) \cdot Y = Y$.

Example.

$k = \mathbb{R}$, $X := \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ とする. $(\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}} = \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ に注意.
$\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}) := \{id, \sigma\}$, 但し $\sigma \cdot (a, b) := (a^\sigma, b^\sigma) = (\overline{a}, \overline{b})$.

❶ $(1, \sqrt{-1}) \in \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ に対し, $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}) \cdot \{(1, \sqrt{-1})\} = \{(1, \pm\sqrt{-1})\}$.
$\therefore (1, \sqrt{-1}) \in \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ は $\mathbb{R}$ 上に定義されていない.

❷ $C := (x^2 + y^2 = 0) \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ に対し, $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}) \cdot C = C$.
$\therefore C \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ は $\mathbb{R}$ 上に定義されている.
注) C は $\mathbb{R}$ 上定義されない点を含んでいる.

交叉数

Definition.

k: (代数閉体とは限らない) 標数 0 の体, $\overline{k}$: k の代数閉包,
S: k 上に定義された非特異射影代数曲面 (*with* $\exists S_{\overline{k}} \to \mathbb{P}^2_{\overline{k}}$; 双有理射).

- 代数閉体の場合と同様に集合 $\mathrm{Div}(S)$ が定義される.
$\rightsquigarrow$ $D_1, D_2 \in \mathrm{Div}(S)$ に対し,
交叉数 $(D_1 \cdot D_2)$ を $(D_{1,\overline{k}} \cdot D_{2,\overline{k}})$ で定義する.
- 代数閉体の場合と同様にネロン・セヴェリ群 $\mathrm{NS}(S)$ が定義できる.

Example.

$C_1 := (z = 0)$, $C_2 := (x^2 + y^2 = 0) \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ に対し, $(C_1 \cdot C_2)$ を考える.

- 集合として, $C_{2,\mathbb{C}} = (x + \sqrt{-1}y = 0) \cup (x - \sqrt{-1}y = 0)$.

$\rightsquigarrow$ 因子として $C_{2,\mathbb{C}} = C_{2,+} + C_{2,-}$ と見做す.
但し, $(C_{2,\pm} := (x \pm \sqrt{-1}y = 0) \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})$.

$\therefore (C_1 \cdot C_2) = (C_{1,\mathbb{C}} \cdot C_{2,\mathbb{C}}) = (C_{1,\mathbb{C}} \cdot C_{2,+} + C_{2,-}) = 1 + 1 = 2$.

ピカール数

k: (代数閉体とは限らない) 標数 0 の体, $\overline{k}$: k の代数閉包,
S: k 上に定義された非特異射影代数曲面 (with $\exists S_{\overline{k}} \to \mathbb{P}^2_{\overline{k}}$; 双有理射).

Fact.

$\mathrm{NS}(S) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \simeq (\mathrm{NS}(S_{\overline{k}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R})^{\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)}$.

- $(\mathrm{NS}(S_{\overline{k}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R})^{\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)}$ は $\mathrm{NS}(S_{\overline{k}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ の部分 $\mathbb{R}$-線型空間.

Definition.

$\rho_k(S) := \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{NS}(S) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = \dim_{\mathbb{R}} (\mathrm{NS}(S_{\overline{k}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R})^{\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)}$.

Remark.

$(1 \le)\ \rho_k(S) \le \rho_{\overline{k}}(S_{\overline{k}})$.

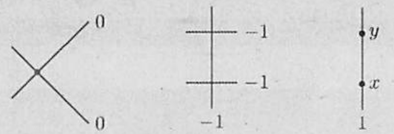
$\mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k$

Fact.

$/k$: 代数閉体,
$x, y \in \mathbb{P}^2_k$: (異なる) 閉点,
$f : S' \to \mathbb{P}^2_k$; x, y を中心としたブローイングアップ.

- S' 内には f の例外曲線以外に丁度 1 本の (-1)-曲線 E が存在する.

$g : S' \to S$; E の収縮.
このとき, $S \simeq \mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k$.



$$\mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k \xleftarrow{g} S' \xrightarrow{f} \mathbb{P}^2_k$$

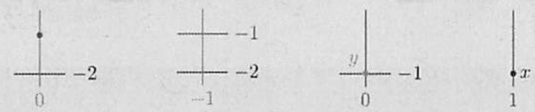
2 次の Hirzebruch 曲面

Definition.

$/k$: 代数閉体,
$x \in \mathbb{P}^2_k$: 閉点, $f : S' \to \mathbb{P}^2_k$; x を中心としたブローイングアップ.
$y \in S'$; f の例外曲線上の閉点,
$g : S'' \to S'$; y を中心としたブローイングアップ.

- S'' 内には g の例外曲線以外に丁度 1 本の (-1)-曲線 E が存在する.

$h : S'' \to S$; E の収縮.
このとき, S を 2 次の Hirzebruch 曲面といい, $\mathbb{F}_2$ (*or* Σ_2) と表す.



$$\mathbb{F}_2 \xleftarrow{h} S'' \xrightarrow{g} S' \xrightarrow{f} \mathbb{P}^2_k$$

4

(Almost) general position

Definition.

$/k$: 代数閉体,
$\tau : S := S_r \to S_{r-1} \cdots \to S_1 \to S_0 := \mathbb{P}^2_k$;
　1点ブローイングアップの合成 $(0 \le r \le 8)$.

1. τ; general position にある点達のブローイングアップ
$\underset{\text{def.}}{\iff}$ 以下の 4 つの条件を全て充たす:
    - どのブローイングアップする点も例外曲線 (含, 引き戻し) 上にない.
    - どの 3 点も直線上にない.
    - どの 6 点も既約 2 次曲線上にない.
    - どの 8 点も特異点をもつ既約 3 次曲線上にない.
2. τ; almost general position にある点達のブローイングアップ
$\underset{\text{def.}}{\iff}$ 以下の 3 つの条件を全て充たす:
    - 例外曲線 (含, 引き戻し) E 上の点をブローイングアップするならば, $(E)^2 = -1$.
    - どの 4 点も直線上にない.
    - どの 7 点も既約 2 次曲線上にない.

Weak dek Pezzo 曲面

$/k$: 代数閉体

Definition.

1. $S \to \mathbb{P}^2_k$; genenal position にある点達のブローイングアップ.
このとき, S を非特異 del Pezzo 曲面という.
2. $\widetilde{S} \to \mathbb{P}^2_k$; almost genenal position にある点達のブローイングアップ.
このとき, $\widetilde{S}$ を weak del Pezzo 曲面という.

Remark.

1. $\mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k$ も非特異 del Pezzo 曲面とみなす.
2. $\mathbb{F}_2$ も weak del Pezzo 曲面とみなす.

Fact.

$\widetilde{S}$: weak del Pezzo 曲面, $\widetilde{S} \supseteq C$: 既約 (且つ被約) な曲線.

- $(C)^2 < 0 \Longrightarrow C$: (-1)-曲線 or (-2)-曲線.
更に, $\widetilde{S}$: 非特異 del Pezzo 曲面ならば, $(C)^2 \neq -2$.

Du Val del Pezzo 曲面

$/k$: 代数閉体,
$\widetilde{S}$: weak del Pezzo 曲面.

Fact.

$\widetilde{S}$ 内に含まれる (-2)-曲線は高々有限個しかない.

$\widetilde{S} \supseteq E$: 全ての (-2)-曲線の和.

Fact.

$\sigma : \widetilde{S} \to S$; 双有理射 s.t.
　$\widetilde{S} \backslash E \simeq S \backslash \sigma(E)$, 且つ, $\sigma(E)$ は S 上の (Du Val) 特異点の和.
更に, S 上の特異点は E の連結成分に対応している.

S を **Du Val del Pezzo 曲面**という. また, σ を E の収縮という.

次数

Definition.

$/k$: 代数閉体,
$\widetilde{S}$: weak del Pezzo 曲面.

1. $\widetilde{S}$ の次数 d を次のように定める:
    - $\widetilde{S} \simeq \mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k$ or $\mathbb{F}_2$ のとき, $d := 8$ で定める.
    - $\widetilde{S} \simeq \mathbb{P}^2_k$ のとき, $d := 9$ で定める.
    - $\widetilde{S} \to \mathbb{P}^2_k$; almost general position にある点達のブローイングアップのとき, $d := 9 -$ (ブローアップした点の個数) で定める.
2. $\sigma : \widetilde{S} \to S$; 全ての (-2)-曲線の収縮, i.e., S: Du Val del Pezzo 曲面.
このとき, S の次数 $:=$ ($\widetilde{S}$ の次数) で定める.

Remark.

$\widetilde{S}$ (resp. S) の次数は, $(-K_{\widetilde{S}})^2$ (resp. $(-K_S)^2$) でも定義できる.
但し, $-K_S$ (反標準因子) を定義してないので, 深入りしない事にする.

非代数閉体上に定義された Du Val del Pezzo 曲面

k: 標数 0 の (代数閉体とは限らない) 体

Definition.

S: **Du Val del Pezzo 曲面** $/k$ $\underset{\text{def.}}{\iff}$ $S_{\overline{k}}$: Du Val del Pezzo 曲面 $/\overline{k}$.

S: Du Val del Pezzo 曲面 $/k$.
$\rightsquigarrow \exists \widetilde{S}$: 非特異射影代数曲面 $/k$ s.t.

- $\widetilde{S}_{\overline{k}} \simeq \mathbb{P}^1_{\overline{k}} \times \mathbb{P}^1_{\overline{k}}$, $\widetilde{S}_{\overline{k}} \simeq \mathbb{F}_2$, or $\exists \tau : \widetilde{S}_{\overline{k}} \to \mathbb{P}^2_{\overline{k}}$; almost general position.
- $S_{\overline{k}}$ は $\widetilde{S}_{\overline{k}}$ 内にある全ての (-2)-曲線, say E, の収縮.

Definition.

1. S の次数 $:=$ ($S_{\overline{k}}$ の次数).
2. $\rho_k(S) := \rho_k(\widetilde{S}) -$ (E への $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$-作用の軌道の個数).
    - $\widetilde{S}_{\overline{k}} \simeq \mathbb{F}_2$ のとき, $\rho_k(\widetilde{S}) := 2$, $\rho_k(S) := 1$ と定める.
    - $\widetilde{S}_{\overline{k}} \simeq \mathbb{P}^1_{\overline{k}} \times \mathbb{P}^1_{\overline{k}}$ のとき, $S \simeq \widetilde{S}$ に注意して, $\rho_{\overline{k}}(S_{\overline{k}}) := 2$ と定める.
    なお, $\rho_k(S)$ も定義できるが, ここでは割愛する.

1. Du Val del Pezzo surfaces of Picard rank one
2. Du Val singularities
3. Main results

Du Val 特異点

k: 標数 0 の体,
V: 正規射影代数曲面 $/k$.

Definition.

1. k: 代数閉体とする. $x \in V$: 特異点に対し,
$x \in V$: **Du Val 特異点**
$\underset{\text{def.}}{\iff}$ $\sigma : \widetilde{V} \to V$; x の極小特異点解消に対し,
σ の例外集合 $\sigma^{-1}(\{x\})$ の各既約成分は (-2)-曲線.
2. k: 代数閉体でないとする. $x \in V$: k-有理点に対し,
$x \in V$: **Du Val 特異点** $\underset{\text{def.}}{\iff}$ $x \in V_{\overline{k}}$: Du Val 特異点.

Remark.

$x \in V$: 閉点に対し, $x \in V$: k-有理点 $\underset{\text{def.}}{\iff}$ $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k) \cdot \{x\} = \{x\}$.
※ $x \in V$: k-有理点に対し, x は V 上の点とも $V_{\overline{k}}$ 上の点とも見做せる.

代数閉体上に定義された Du Val 特異点

k: 標数 0 の代数閉体,
V: 正規射影代数曲面 $/k$, $x \in V$: Du Val 特異点.
$\sigma : \widetilde{V} \to V$; x の極小特異点解消, E: σ の例外集合.

このとき, E の双対グラフは, 以下のいずれかの Dynkin グラフとなる:

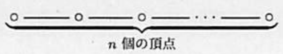
- type A_n $(n \ge 1)$, type D_n $(n \ge 4)$, type E_6, type E_7, type E_8.

更に $k = \mathbb{C}$ のとき,
$(x \in V)$ は (singularity type に応じて) 次と同型になる:

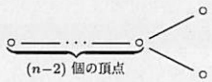
- $0 \in (x^2 + y^2 + z^{n+1} = 0) \subseteq \mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$　if $x \in V$: type A_n;
- $0 \in (x^2 + y^2 z + z^{n-1} = 0) \subseteq \mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$　if $x \in V$: type D_n;
- $0 \in (x^2 + y^3 + z^4 = 0) \subseteq \mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$　if $x \in V$: type E_6;
- $0 \in (x^2 + y^3 + yz^3 = 0) \subseteq \mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$　if $x \in V$: type E_7;
- $0 \in (x^2 + y^3 + z^5 = 0) \subseteq \mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$　if $x \in V$: type E_8.

代数閉体上に定義された Du Val 特異点の singularity type

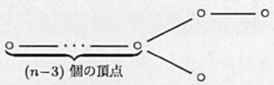
Du Val 特異点の singularity type (i.e., E の双対グラフ) は以下の通り:

Type A_n: 

$(n \in \mathbb{Z}_{\ge 1})$

Type D_n: 

$(n \in \mathbb{Z}_{\ge 4})$

Type E_n: 

$(n = 6, 7, 8)$

Remark. (双対グラフについて)

各頂点は, (既約且つ被約な) 曲線を対応している. また, 対応する 2 曲線が交わるとき, 対応する 2 頂点間に辺を引く事により, グラフを考える.

5

$\mathbb{R}$ 上に定義された Du Val 特異点 (1/5)

非代数閉体の 1 つである実数体 $\mathbb{R}$ 上において,
Du Val 特異点を考えてみる.

Example. (type A_3)

$V_1 := (x^2 - y^2 - z^4 = 0) \subseteq \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$,
$V_2 := (x^2 + y^2 - z^4 = 0) \subseteq \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$,
$V_3 := (x^2 + y^2 + z^4 = 0) \subseteq \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$.

- $V_{1,\mathbb{C}} \simeq V_{2,\mathbb{C}} \simeq V_{3,\mathbb{C}}$.
- $0 \in V_{i,\mathbb{C}}$: type A_3 $(i = 1, 2, 3)$.
- しかし, V_1, V_2, V_3 はいずれも ($\mathbb{R}$ 上では) 同型でない.
  $0 \in V_1$, $0 \in V_2$, $0 \in V_3$ は ($\mathbb{R}$ 上では) 異なる特異点と考えられる.

$\mathbb{R}$ 上に定義された Du Val 特異点 (2/5)

Definition. (Kollár '99)

V: 正規射影代数曲面 $/\mathbb{R}$, $x \in V$: $\mathbb{R}$-有理点 s.t. $x \in V_{\mathbb{C}}$: *Du Val* 特異点.

❶ $x \in V_{\mathbb{C}}$: *type* A_n のとき:
- $x \in V$: type $A_n^- \underset{\text{def.}}{\iff} (x \in V) \simeq (0 \in (x^2 - y^2 - z^{n+1} = 0))$;
- $x \in V$: type $A_n^+ \underset{\text{def.}}{\iff} (x \in V) \simeq (0 \in (x^2 + y^2 - z^{n+1} = 0))$;
- $x \in V$: type $A_n^{++} \underset{\text{def.}}{\iff} (x \in V) \simeq (0 \in (x^2 + y^2 + z^{n+1} = 0))$.

❷ $x \in V_{\mathbb{C}}$: *type* D_n のとき:
- $x \in V$: type $D_n^- \underset{\text{def.}}{\iff} (x \in V) \simeq (0 \in (x^2 + y^2 z - z^{n-1} = 0))$;
- $x \in V$: type $D_n^+ \underset{\text{def.}}{\iff} (x \in V) \simeq (0 \in (x^2 + y^2 z + z^{n-1} = 0))$.

❸ $x \in V_{\mathbb{C}}$: *type* E_6 のとき:
- $x \in V$: type $E_6^- \underset{\text{def.}}{\iff} (x \in V) \simeq (0 \in (x^2 + y^3 - z^4 = 0))$;
- $x \in V$: type $E_6^+ \underset{\text{def.}}{\iff} (x \in V) \simeq (0 \in (x^2 + y^3 + z^4 = 0))$.

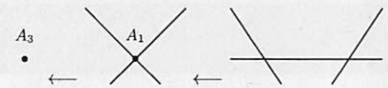
$\mathbb{R}$ 上に定義された Du Val 特異点 (3/5)

A_3^-: $V_1 := (x^2 - y^2 - z^4 = 0) \subseteq \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$,
A_3^+: $V_2 := (x^2 + y^2 - z^4 = 0) \subseteq \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$,
A_3^{++}: $V_3 := (x^2 + y^2 + z^4 = 0) \subseteq \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$

に対し, これらの原点における極小特異点解消を考える.

- 例外曲線の局所的な定義式:

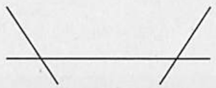
	1 回目の blowing-up	2 回目の blowing-up
V_1	$x_1^2 - y_1^2 = 0$	$x_2^2 - y_2^2 - 1 = 0$
V_2	$x_1^2 + y_1^2 = 0$	$x_2^2 + y_2^2 - 1 = 0$
V_3	$x_1^2 + y_1^2 = 0$	$x_2^2 + y_2^2 + 1 = 0$



$\mathbb{R}$ 上に定義された Du Val 特異点 (4/5)

$\rightsquigarrow$ つまり, 例外曲線において:

	($\mathbb{R}$ 上の) 既約成分の個数	$\mathbb{R}$-有理点の有無
A_3^-	3 個	有
A_3^+	2 個	有
A_3^{++}	2 個	無



Remark.

例外曲線には Galois 群 $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ が自然に作用する.
($\mathbb{R}$ 上の) 既約成分の個数 < 3 のとき,
($\mathbb{C}$ 上での) 両端の既約成分はこの作用で移り合っている.

$\mathbb{R}$ 上に定義された Du Val 特異点 (5/5)

V: 正規射影代数曲面 $/\mathbb{R}$, $x \in V$: $\mathbb{R}$-有理点 s.t. $x \in V_{\mathbb{C}}$: Du Val 特異点,
$\sigma : \widetilde{V} \to V$; x の極小特異点解消, E: σ の例外集合.

Lemma.

❶ $x \in V_{\mathbb{C}}$: *type* A_1 のとき:
- $x \in V$: *type* A_1^+ (*resp. type* A_1^{++}) $\overset{\text{iff}}{\iff} E(\mathbb{R}) \neq \emptyset$ (*resp.* $E(\mathbb{R}) = \emptyset$);

❷ $x \in V_{\mathbb{C}}$: *type* A_n $(n \geq 2)$ のとき:
- $x \in V$: *type* $A_n^- \overset{\text{iff}}{\iff} \rho_{\mathbb{R}}(\widetilde{V}/V) = n$;
- $x \in V$: *type* $A_n^+ \overset{\text{iff}}{\iff} E(\mathbb{R}) \neq \emptyset$, 且つ, $\rho_{\mathbb{R}}(\widetilde{V}/V) < n$;
- $x \in V$: *type* $A_n^{++} \overset{\text{iff}}{\iff} E(\mathbb{R}) = \emptyset$, 且つ, $\rho_{\mathbb{R}}(\widetilde{V}/V) < n$.

❸ $x \in V_{\mathbb{C}}$: *type* D_n (*resp. type* E_6) のとき:
- $x \in V$: *type* D_n^- (*resp. type* E_6^-) $\overset{\text{iff}}{\iff} \rho_{\mathbb{R}}(\widetilde{V}/V) = n$ (*resp.* $= 6$);
- $x \in V$: *type* D_n^+ (*resp. type* E_6^+) $\overset{\text{iff}}{\iff} \rho_{\mathbb{R}}(\widetilde{V}/V) < n$ (*resp.* < 6).

$\rightsquigarrow$ singularity type の違いは, Galois 群作用の振る舞いのみで判別できる.
I.e., 定義式を見なくて良いので, $\mathbb{R}$ 以外の非代数閉体に拡張できる!

非代数閉体上に定義された Du Val 特異点

k: 標数 0 の体,
V: 正規射影代数曲面 $/k$, $x \in V$: k-有理点 s.t. $x \in V_{\overline{k}}$: Du Val 特異点,
$\sigma : \widetilde{V} \to V$; x の極小特異点解消, E: σ の例外集合.

Definition.

❶ $x \in V_{\overline{k}}$: *type* A_1 のとき:
- $x \in V$: type A_1^+ (*resp.* type A_1^{++}) $\underset{\text{def.}}{\iff} E(k) \neq \emptyset$ (*resp.* $E(k) = \emptyset$);

❷ $x \in V_{\overline{k}}$: *type* A_n $(n \geq 2)$ のとき:
- $x \in V$: type $A_n^- \underset{\text{def.}}{\iff} \rho_k(\widetilde{V}/V) = n$;
- $x \in V$: type $A_n^+ \underset{\text{def.}}{\iff} E(k) \neq \emptyset$, 且つ, $\rho_k(\widetilde{V}/V) < n$;
- $x \in V$: type $A_n^{++} \underset{\text{def.}}{\iff} E(k) = \emptyset$, 且つ, $\rho_k(\widetilde{V}/V) < n$.

❸ $x \in V_{\overline{k}}$: *type* D_n (*resp. type* E_6) のとき:
- $x \in V$: type D_n^- (*resp.* type E_6^-) $\underset{\text{def.}}{\iff} \rho_k(\widetilde{V}/V) = n$ (*resp.* $= 6$);
- $x \in V$: type D_n^+ (*resp.* type E_6^+) $\underset{\text{def.}}{\iff} \rho_k(\widetilde{V}/V) < n$ (*resp.* < 6).

Du Val del Pezzo 曲面内の特異点 of type A_{9-2d} (1/2)

Definition. (cf. Urabe '83)

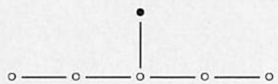
k: 標数 0 の体,
S: 次数 $d \leq 2$ の Du Val del Pezzo 曲面 $/k$.
Assume: $\exists x \in S$: k-有理点 s.t. $x \in S_{\overline{k}}$: Du Val 特異点 of type A_{9-2d}.
$\sigma : \widetilde{S} \to S$; x の極小特異点解消, E: σ の例外集合.

- $x \in S$: *of type* $(A_{9-2d})'$
  $\underset{\text{def.}}{\iff}$ E の双対グラフに於いて中央の頂点に対応する (-2)-曲線と交わるような (-1)-曲線 *on* $\widetilde{S}_{\overline{k}}$ が存在する.
- $x \in S$: *of type* $(A_{9-2d})''$
  $\underset{\text{def.}}{\iff}$ 上述したような (-1)-曲線 *on* $\widetilde{S}_{\overline{k}}$ が存在しない.

$d = 2$: ∘——∘——∘——∘——∘

Du Val del Pezzo 曲面内の特異点 of type A_{9-2d} (2/2)

$d = 2$:

type $(A_5)'$: 

type $(A_5)''$: 

※ 頂点 ∘ (resp. •) は, (-2)-曲線 (resp. (-1)-曲線) が対応しています.

※ $d = 1$ の場合は, ∘ の chain の両端にそれぞれ ∘ を 1 個ずつ付け加えたものを考えて下さい.

6

シリンダーと先行結果

Definition.

$/k$: 体,
X: 代数多様体, $X \supseteq U$: 開部分集合, $r \in \{1, 2, \ldots, \dim X\}$.

- U: $\mathbb{A}^r_k$-シリンダー $\underset{def.}{\iff}$ $\exists Z$: 代数多様体 s.t. $U \simeq \mathbb{A}^r_k \times Z$.

Theorem. (Dubouloz-Kishimoto '18)

$/k$: 標数 0 の体,
S: ピカール数 1 の**非特異** del Pezzo 曲面, $d \in \{1, \ldots, 6, 8, 9\}$: S の次数.
このとき, 以下が成立する:

- $S \supseteq \exists \mathbb{A}^1_k$-シリンダー $\overset{iff}{\iff}$ $d \geq 5$, 且つ, $S(k) \neq \emptyset$.
- $S \supseteq \exists \mathbb{A}^2_k$-シリンダー $\overset{iff}{\iff}$ $d \geq 8$, 且つ, $S(k) \neq \emptyset$.

但し, $S(k) := \{x \in S_{\overline{k}} \mid x \in S$: k-有理点$\}$.

主結果 1 (1/2)

Theorem 1. (S.)

k: 標数 0 の体,
S: ピカール数 1 の **Du Val** del Pezzo 曲面 $/k$ s.t. $\mathrm{Sing}(S_{\overline{k}}) \neq \emptyset$,
$d \in \{1, \ldots, 6, 8\}$: S の次数.
このとき, 以下が成立する:

(1) $d \geq 5 \Longrightarrow S \supseteq \exists \mathbb{A}^1_k$-シリンダー.

(2) $d = 3, 4$ のとき:
$S \supseteq \exists \mathbb{A}^1_k$-シリンダー
$\overset{iff}{\iff}$ $\exists x \in S_{\overline{k}}$: k 上に定義された Du Val 特異点 s.t.
$x \in S$: NOT of type A_1^{++} over k.

主結果 1 (2/2)

Theorem 1. (S.)

(Continued.)

(3) $d = 1, 2$ のとき:

(i) $d = 2$ (resp. $d = 1$), 且つ, $S_{\overline{k}}$ は type A_6, A_7, D_n or E_n (resp. type A_8, D_6, D_7, D_8, E_7 or E_8) の Du Val 特異点をもつ
$\Longrightarrow S \supseteq \exists \mathbb{A}^1_k$-シリンダー;

(ii) $\exists x \in S_{\overline{k}}$: Du Val 特異点 of type $(A_{9-2d})''$ ならば,
$S \supseteq \exists \mathbb{A}^1_k$-シリンダー $\overset{iff}{\iff}$ $x \in S$: NOT of type A^{++}_{9-2d} over k;

(iii) $d = 2$ (resp. $d = 1$), 且つ, $S_{\overline{k}}$ は高々 type A_1 (resp. types A_1, A_2, A_3, D_4) の Du Val 特異点しかもたない
$\Longrightarrow S \supseteq \nexists \mathbb{A}^1_k$-シリンダー;

(iv) $S_{\overline{k}}$ は (i), (ii), (iii) のいずれの仮定も充たさないならば,
$S \supseteq \exists \mathbb{A}^1_k$-シリンダー
$\overset{iff}{\iff}$ $\exists x \in S_{\overline{k}}$: k 上に定義された Du Val 特異点 s.t.
$x \in S$: of type A_n^-, D_5^- or E_6^- over k.

主結果 2

Theorem 2. (S.)

k: 標数 0 の体.
S: ピカール数 1 の **Du Val** del Pezzo 曲面 $/k$ s.t. $\mathrm{Sing}(S_{\overline{k}}) \neq \emptyset$,
$d \in \{1, \ldots, 6, 8\}$: S の次数.

❶ $d = 8$ のとき:
$S \supseteq \exists \mathbb{A}^2_k$-シリンダー
$\overset{iff}{\iff}$ $\exists x \in S$: k-有理点 s.t. $x \in S_{\overline{k}}$: 非特異点.

❷ $d = 5, 6$ のとき, $S \supseteq \exists \mathbb{A}^2_k$-シリンダー.

❸ $d \leq 4$ のとき:
$S \supseteq \exists \mathbb{A}^2_k$-シリンダー $\overset{iff}{\iff}$ (d, Sing) は次のいずれか:
$(d, \mathrm{Sing}) = (4, D_5)$, $(4, D_4)$, $(4, A_2 + 2A_1)$, $(4, A_2)$,
$(3, E_6)$, $(3, D_4)$, $(2, E_7)$, $(2, E_6)$, $(2, A_6)$, $(1, E_8)$.

主結果 2 の補足

S: 曲面のとき, 次に注意:
$S \supseteq \exists \mathbb{A}^2$-シリンダー $\overset{iff}{\iff}$ $S \supseteq \exists$ アフィン平面 $\mathbb{A}^2$.

Theorem. (Kojima '01, Kojima-Takahashi '09)

$\mathbb{C}$ 上に定義された高々 lc 特異点をもつピカール数 1 の del Pezzo 曲面で, アフィン平面 $\mathbb{C}^2$ を含むものを分類.

- Theorem 2 は, 上の論文にある手法を基礎体が標数 0 の体 (特に非代数閉体) の場合へ一般化する事により得られる.
- 標数 0 の体 k 上に定義されたピカール数 1 の del Pezzo 曲面で, $\mathbb{A}^2_k$ を含むものは, 高々 Du Val 特異点をもつ場合 (Theorem 2) だけでなく, 高々 lc 特異点をもつ場合まで分類している.

未解決問題 (1/2)

Problem.

$/k$: 標数 0 の体.
S: 次数 2 でピカール数 1 の Du Val del Pezzo 曲面
s.t. $S_{\overline{k}} \ni$ Du Val 特異点 of type D_4.
このとき, $S \supseteq \exists U$: $\mathbb{A}^1_k$-シリンダー s.t. $U_{\overline{k}} \simeq \mathbb{A}^1_{\overline{k}} \times \mathbb{A}^1_{*,\overline{k}}$?

- 上のケース以外のピカール数 1 の Du Val del Pezzo 曲面で $\mathbb{A}^1_k$-シリンダーを含むものについては, 主張は正しい事が分かっている.
- 多分正しくないと思われるが, それを示すためのアイディアがない…

Problem.

$/k$: 任意標数の完全体 (特に標数 2).
次数 2 以下でピカール数 1 の Du Val del Pezzo 曲面を分類せよ.

- Key となるアイディアは, 既に確立済み. (see [Saw1, §4])
- 標数 2 の場合は, 標数 0 には存在しない Dynkin type が生じる.

未解決問題 (2/2)

Problem.

$/k$: 標数 0 の代数閉体.
S: Du Val del Pezzo 曲面.
このとき, 次の集合の構造を決定せよ:

$$\mathrm{Amp}(S)^{\mathrm{cyl}} := \{H \in \mathrm{Amp}(S) \mid \exists H\text{-偏極シリンダー}\}.$$

但し, $\mathrm{Amp}(S) = \{H \in \mathrm{NS}(S) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \mid H$: ample$\}$.

- S: 非特異, 且つ, 次数 3 以上の場合は, [CPW17] が解決済み.
- S: Du Val 特異点をもち, 且つ, 次数 3 の場合は, 講演者が最近解決.
- Du Val 特異点をもち, 且つ, 次数 2 の場合を特に調べたい.
  - Type A_1 でない Du Val 特異点をもつ場合に, 否定的なケースが見つかれば面白い (と思う).
    ($\because$) [CPW17] が提唱した Conjecture の反例になるため.
  - Type A_1 の Du Val 特異点しか持たない場合に, 解明できれば面白い (かも知れない).

参考文献 (1/2)

[宮西 90] 宮西 正宜・著『代数幾何学』裳華房, 1990 年.

[BCHM10] C. Birkar, P. Cascini, C. Hacon and J. McKernan, *Existence of minimal models for varieties of log general type*, J. Amer. Math. Soc. **23** (2010), 405–468.

[CPW16] I. Cheltsov, J. Park and J. Won, *Cylinders in singular del Pezzo surfaces*, Compos. Math. **152** (2016), 1198–1224.

[CPW17] I. Cheltsov, J. Park and J. Won, *Cylinders in del Pezzo surfaces*, IMRN **2017** (2017), 1179–1230.

[Dol12] I. V. Dolgachev, *Classical Algebraic Geometry: a modern view*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2012.

[DK18] A. Dubouloz and T. Kishimoto, *Cylinders in del Pezzo fibrations*, Israel J. Math. **225** (2018), 797–815.

[Har77] R. Hartshorne , *Algebraic Geometry*, Grad. Texts in Math., No. 52. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977.

[Koj01] H. Kojima, *Minimal singular compactifications of the affine plane*, Nihonkai Math. J. **12** (2001), 165–195.

参考文献 (2/2)

[KT09] H. Kojima and T. Takahashi, *Notes on minimal compactifications of the affine plane*, Ann. Mat. Pura Appl. **188** (2009), 153–169.

[Kor99] J. Kollár, *Real algebraic threefolds III. Conic bundles*, J. Math. Sci. **94** (1999), 996–1020.

[KM98] J. Kollár and S. Mori, *Birational geometry of algebraic varieties*, Cambridge Tracts in Math., Vol. 134, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998.

[KSC04] J. Kollár, K. E. Smith and A. Corti, *Rational and Nearly Rational Varieties*, Cambridge Stud. Adv. Math., Vol. 92, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.

[Miy01] M. Miyanishi, *Open algebraic surfaces*, CRM Monogr. Ser., Vol. 12, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.

[Saw1] M. Sawahara, *Cylinders in canonical del Pezzo fibrations*, Ann. Inst. Fourier (to appear).

[Saw2] M. Sawahara, *Compactifications of the affine plane over non-closed fields*, Pacific J. Math (to appear).

[Ura83] T. Urabe, *On singularities on degenerate del Pezzo surfaces of degree 1, 2*, In: *Singularities, Part 2*, 587–591, Proceedings of Symposia in Applied Mathematics **40**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1983.