# Rings of nilpotent elements of monomial derivation on polynomial rings

服部（新潟）

$\mathbb{Q} \subseteq R$ : UFD
$A := R[x_1, \dots, x_n]$
$\mathrm{Der}_R(A)$ : A上の R-derivation 全体.

## Definition

$D \in \mathrm{End}_R(A)$ が R-derivation とは

$$D(fg) = D(f)g + fD(g).$$

$D \in \mathrm{Der}_R(A)$ に対して,

$$\mathrm{Nil}(D) := \{ f \in A \mid D^{\ell}(f) = 0 \text{ for } \exists \ell \geq 1 \}.$$

また, Dが lnd (locally nilpotent der.) とは, $\mathrm{Nil}(D) = A$.

## 標数 = 0

$$\begin{array}{c} A \\ \cup \\ \mathrm{Nil}(D) \\ \cup \\ \ker(D) \end{array}$$

$A \supseteq \mathrm{Nil}(D)$ : ?
$\mathrm{Nil}(D) \supseteq \ker(D)$ : factorially closed
$A \supseteq \ker(D)$ : algebraically closed

## Remark

$D = D(x_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + D(x_n)\frac{\partial}{\partial x_n}$ とかける.

## Lemma 1 [Kuroda '15]

$k$ : 体, $\mathrm{char}(k) = 0$

$D \in \mathrm{Der}_k(k[X])$ に対して

$$\tilde{D} := D(x_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + D(x_n)\frac{\partial}{\partial x_n} \in \mathrm{Der}_k(k[x][z])$$

$\tilde{D}(z) = 1$ となる元を スライス という.

このとき, $\mathrm{Nil}(D) \simeq \ker(\tilde{D})$ as $k$-algebras.

$$\mathrm{Nil}(D) \underset{\varphi}{\overset{\psi}{\rightleftarrows}} \ker(\tilde{D})$$

$$f \longmapsto \sum_{\ell \geq 0} \frac{D^{\ell}(f)}{\ell!}(-z)^{\ell}$$

$$0 \longleftarrow z$$

Theorem2 [ Kitazawa - Kojima - Nagamine '19 ]

$\mathbb{Q} \subseteq R$ : UFD .

$D$ : monomial derivation on $R[x,y]$

$D(x)$, $D(y)$ が monomials.

$\gcd(D(x), D(y)) = 1$ と仮定する.（このような D は 既約 と呼ばれる）

ここで Dは 単元倍を除いて, 以下の形でないとする:

① $\frac{\partial}{\partial x}$ , $\frac{\partial}{\partial y}$

② $a y^m \frac{\partial}{\partial x} + b x^n \frac{\partial}{\partial y}$ $(m, n \geq 0,\ a, b \in R \setminus \{0\})$

③ $n x \frac{\partial}{\partial x} - m y \frac{\partial}{\partial y}$ $(m, n \geq 1,\ (m, n) = 1)$

このとき, $\ker(D) = R$.

更に,

Dが ①の形 $\Longrightarrow$ $D = \frac{\partial}{\partial x}$ or $\frac{\partial}{\partial y}$ , $\ker(D) = R[y]$ or $R[x]$.

②の形 $\Longrightarrow$ $\ker(D) = R[\, b(m+1) x^{n+1} - a(n+1) y^{m+1} \,]$

③の形 $\Longrightarrow$ $\ker(D) = R[x^m y^n]$ . □

◎ W-grading , W-homogenious .

$A := R[x_1, \dots, x_n]$

$w = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n$

これに対して,

$$\deg_w(x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}) := \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_n w_n .$$

で 定義する.

$$A_i := \sum_{\deg_w(x^\alpha) = i} R x^\alpha$$

このとき, A は graded algebra で

$$A = \bigoplus_{i \geq 0} A_i$$

でかける.

Definition

$f \in A$ が w-homogenious of degree d $\Longleftrightarrow$ $f \in A_d$ .

$D \in \mathrm{Der}_R A$ が w-homogenious of degree d $\Longleftrightarrow$ $\forall i \geq 0$, $D(A_i) \subset A_{i+d}$

Main result 1

$\mathbb{Q} \subset R$ : UFD

$A := R[x,y]$

$D$ : 既約な mono. der. on $A$

$D$は以下の形ではないと仮定する： (ただし，$R$の単元倍は除く)

① $\frac{\partial}{\partial x}$ or $\frac{\partial}{\partial y}$

② $a\frac{\partial}{\partial x} + bx^m y^{n+1}\frac{\partial}{\partial y}$ or $ax^{m+1}y^n\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}$ $(m,n \geq 0,\ a,b \in R\setminus\{0\})$

③ $ay^m\frac{\partial}{\partial x} + bx^n\frac{\partial}{\partial y}$ $(m,n \geq 0,\ mn = 0,\ a,b \in R\setminus\{0\})$

このとき， $\mathrm{Nil}(D) = \ker(D)$.

更に

$D$が ①の形 $\Rightarrow$ $\mathrm{Nil}(D) = A$

②の形 $\Rightarrow$ $\mathrm{Nil}(D) = R[x]$ or $R[y]$.

③の形 $\Rightarrow$ $\mathrm{Nil}(D) = A$.

(proof of Main result 1)

$D$が①の形なら $\mathrm{Nil}(D) = A$ は明らか.

$D$が②の形，例えば

$$D = a\frac{\partial}{\partial x} + bx^m y^{n+1}\frac{\partial}{\partial y}$$

とすると， $R[x] \subset \mathrm{Nil}(D)$.

$\deg_y(f) \geq 1$ なる $f \in A$ に対して $f \notin \mathrm{Nil}(D)$.

$D$が③の形なら $mn = 0$ より $x, y \in \mathrm{Nil}(D)$. よって $\mathrm{Nil}(D) = A$.

以下，$D$は①,②,③のいずれでもないとする.

このとき，$D$は次の形：

(i) $D = nx\frac{\partial}{\partial x} - my\frac{\partial}{\partial y}$ $(m,n \geq 1,\ (m,n) = 1)$

(ii) $D = ax^{m+1}\frac{\partial}{\partial x} + by^{n+1}\frac{\partial}{\partial y}$ $(m,n \geq 0,\ a,b \in R\setminus\{0\}$ で(i)の形以外$)$

(iii) $D = ay^m\frac{\partial}{\partial x} + bx^n\frac{\partial}{\partial y}$ $(m,n \geq 1,\ a,b \in R\setminus\{0\})$

(i)のとき， $f = \sum_{i,j \geq 0} a_{ij} x^i y^j \in \mathrm{Nil}(D)$ とする.

ある $l \geq 1$ で

$$0 = D^l(f) = \sum_{i,j \geq 0} a_{i,j}(in - jm)^l x^i y^j$$

$\because$ $a_{ij} \neq 0$ ならば $x^i y^j \in R[x^m y^n] = \ker(D)$ なので $f \in \ker(D)$.

(ii) $\ker D = R$

$f \in A \setminus R \Rightarrow D(f) \in A \setminus R$

$\therefore$ $\mathrm{Nil}(D) = R = \ker(D)$.

(iii) $h := (m+1)bx^{n+1} - (n+1)ay^{m+1}$ として, $w := (m+1, n+1)$ とおく.

このとき,

$\begin{cases} \ker D = R[h] \\ D \text{ は 次数 } mn-1 \geq 0 \text{ の } w\text{-homog.} \end{cases}$ ←(Thm [KKN'19] より)

以下, $\ker D^2 = \ker D$ を示す. (これより $\mathrm{Nil}(D) = \ker(D)$).

$w$-homog. $f \in \ker D^2$ をとると, $D(f) \in \ker D = R[h]$.

また, $D(f) \in R$ なら 次数の入れ方より $f \in \ker(D)$.

今, $f$ は $w$-homog. なので $D(f) = ch^r$ ($c \in R \setminus \{0\}$, $r \geq 1$) の形をしていると仮定すると,

$D(f) = ch^r$ なので, $xy$ の多項式として 係数を比較すると, 矛盾を得る.

$\therefore$ $D(f) \in R$. $\square$

Lemma 3

$R$ : ring.

$A$ : $R$-algebra.

$D \in \mathrm{Der}_R(A)$.

$\Delta := fD$ ($f \in A \setminus \{0\}$).

ここで, $fg \in \ker(\Delta)$ となる $g \in A \setminus \{0\}$ が存在しないと仮定する.

このとき, $\mathrm{Nil}(\Delta) = \ker(\Delta)$. $\square$

## Main result 2.

$\mathbb{Q} \subset R$ : UFD.

$A = R[x,y]$

$D$ : 既約な mono. der. on $A$

$\Delta := x^s y^t D \quad ((s,t) \neq (0,0))$

$\Delta$ が以下の形ではないと仮定する：

① $y^t \frac{\partial}{\partial x} \quad (t \geq 1)$

② $x^s \frac{\partial}{\partial y} \quad (s \geq 1)$

③ $x^s y^t \left(nx \frac{\partial}{\partial x} - my \frac{\partial}{\partial y}\right) \quad (m,n \geq 1,\ (m,n)=1,\ mt \neq ns)$

このとき, $\mathrm{Nil}(\Delta) = \ker(\Delta)$

更に

$\Delta$ が ①の形 $\Longrightarrow$ $\mathrm{Nil}(\Delta) = A$

②の形 $\Longrightarrow$ $\mathrm{Nil}(\Delta) = A$

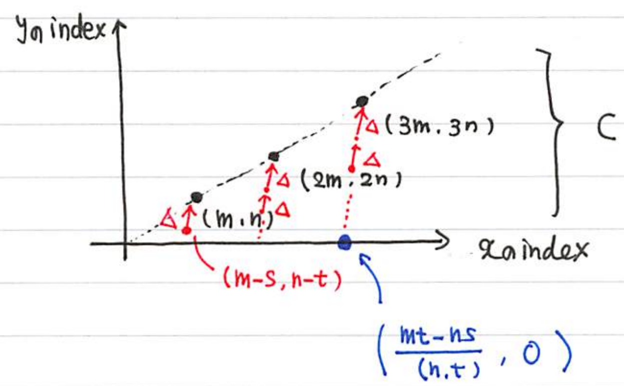
③の形 $\Longrightarrow$ $\mathrm{Nil}(\Delta) = R[x^i y^j \mid (i,j) \in C]$

$C := \{(i,j) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^2 \mid \exists p \geq 0,\ \exists q > 0 \text{ s.t. } (i,j) + p(s,t) = q(m,n)\}$

(C)を考えよう. $mt > ns$ としておく.

$\ker(\Delta) = R[x^m y^n]$

$\Delta(x^i y^j) = (in - jm)\, x^{i+s} y^{j+t}$




$x^m y^n \in \ker(\Delta) \subset \mathrm{Nil}(\Delta)$

//

## Example

$\Delta = x\left(x \frac{\partial}{\partial x} - my \frac{\partial}{\partial y}\right) \quad (m \geq 1)$ とする.

このとき, $\mathrm{Nil}(\Delta) = R[y, xy, \ldots, x^m y]$.

① $Q(\mathrm{Nil}(\Delta)) \cap R[x,y] \neq \mathrm{Nil}\,\Delta$

$\quad\quad \ni x \quad\quad\quad \not\ni x$

② $x \in R[x,y]$ は $yT - xy \in \mathrm{Nil}(\Delta)[T]$ の根なので, $\mathrm{Nil}(\Delta)$は $R[x,y]$で代数的に閉じていない. □