Some criteria for a ring to be a UFD and their applications

長峰さん（小山高専）

§1

k : 体

$X := \mathrm{Spec}\, A$: affine 代数多様体

Want to do

① A が UFD のとき，生成元と関係式を与えたい．

② $A = \dfrac{k[x_1, \cdots, x_n]}{(f_1, \cdots, f_r)}$ のとき，A が UFD となるときの条件を与えたい．

UFD判定を使って考えたい問題．

① Zariski の消去問題

$A[t]$ が多項式環 $\underset{?}{\Longrightarrow}$ $\overset{\text{UFD}}{A}$ が多項式環

・$\mathrm{Char}(k) = 0$ & $\dim A \geq 3$ は未解決．

② ${}^{\exists}\varphi : k[\underline{X}] \twoheadrightarrow A$: k-alg の準同型

(s.t.) $0 \to \ker(\varphi) \to k[\underline{X}] \to \overset{\text{UFD}}{A} \to 0$: split.

$\left.\begin{array}{l} \cdot\ \mathrm{Char}(k) = 0 \ \&\ \dim A \geq 3 \\ \cdot\ \mathrm{char}(k) > 0 \ \&\ \dim A = 2 \end{array}\right\}$ が未解決．

③ $\mathbb{G}_a = (k, +) \curvearrowright k[\underline{X}]$ のとき，$\overset{\text{UFD \& } \dim A = n-1}{A} := k[x_1, \cdots, x_n]^{\mathbb{G}_a}$ は k 上有限生成か？

$\left.\begin{array}{l} \cdot\ \mathrm{Char}(k) = 0 \quad \& \quad n = 4 \\ \cdot\ \mathrm{char}(k) > 0 \ \text{のときはほとんどわかっていない．} \end{array}\right\}$ 未解決．

Today

$\dim X = n$, $\underset{\substack{\| \\ (k^\times)^{n-1}}}{(\mathbb{G}_m)^{n-1}} \curvearrowright X$ のときを考える.

このとき, A への $\mathbb{Z}^{n-1}$-grading が入り, $A = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}^{n-1}} A_d$ とかける.

Theorem [Mori '77 (dim = 2), Ishida '77 (dim = 3), Hausen-Herppich-Süss '11 (dim ≥ 2, $\mathrm{char}(k) = 0$)]

$G := \mathbb{Z}^{n-1}$, $k = \bar{k}$, A: UFD かつ effective (i.e.) $\langle d \in G \mid A_d \neq 0 \rangle = G$ と仮定する.

また, ・unmixed (i.e.) $d + e = 0 \Rightarrow d = e = 0$ $(d, e \in G)$

・pointed (i.e.) $A_0 = k$

($G \subset \mathbb{Z}^{n-1}$ が unmixed $\Leftrightarrow \exists \{u_1, \cdots, u_n\}$: $\mathbb{Z}$-基 of G (s.t.) $G \subset \mathbb{N}u_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{N}u_m$.)

を仮定する.

このとき, A は 3項式で定義される.

(e.g.) $\dim A = 2 \Rightarrow A = \dfrac{k[x, y, z_1, \cdots, z_n]}{(x^a + \lambda_i y^b + z_i^{c_i})_{1 \le i \le n}}$ + (a, b, c, d に関する条件)

⇝ 3項式で定義される k-代数が UFD となるための条件を与える.

Remark

$\dim A = 2$ のとき, 定理の仮定は

・$A = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} A_d$

・$A_d = 0$ for $\forall d < 0$

・$A_0 = k$

§2 UFD判定

▨ Samuelの判定法 1 '64

A : normal (i.e.) Noetherian & integrally closed)

$a, b \in A \setminus \{0\}$ は互いに素 (i.e.) $(a) \cap (b) = (ab)$

Theorem [Samuel '64]

(a), (a, b) は A の素イデアルとする.

① $B := A[z]/(az-b)$ は Krull 整域

② $Cl(B) \simeq Cl(A)$

③ B : UFD $\Leftrightarrow$ A : UFD.

$$\mathrm{Div}(A) = \bigoplus_{\substack{\mathfrak{p}_i \in \mathrm{Spec} A \\ \mathrm{ht}(\mathfrak{p}_i)=1}} \mathbb{Z}\mathfrak{p}_i$$

$\rightsquigarrow$ $Cl(A) := \mathrm{Div}(A)/\sim$

Remark

A : UFD $\Leftrightarrow$ A : Krull & $Cl(A) = 0$

高さ1の素イデアルが単項生成

Theorem 1 [DFN '22]

A, a, b が次の2条件を満たすとする.

① $a = p_1 \cdots p_r$ ($p_i \in A$ は素元)

② (p_i, b) は素イデアル または $(p_i, b) = A$.

このとき, Samuelの ①～③ が成り立つ.

Example

$A = k[X, Y]$

$\rightsquigarrow$ $A[z]/(Y^2 z - X)$ が UFD.

▨ Samuel の判定法 2

Theorem [Samuel '64]

- $A = R[x_1, \cdots, x_n]$, R : UFD, $\deg x_i > 0$
- $c \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$
- $f \in A$: 既約な斉次式で $\gcd(c, \deg(f)) = 1$

更に次の (i), (ii) が成り立つとする.

(i) $c \equiv 1 \pmod{\deg f}$

(ii) $\mathrm{proj}\, R = \mathrm{free}\, R$

このとき, $B := A[z]/(z^c - f)$ は UFD.

Theorem 2 [DFN'22]

- A : $\mathbb{Z}$ 次数付き整域
- $c \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$
- $f \in A$: 素元, 斉次, $\gcd(c, \deg(f)) = 1$

このとき,

$$B = A[z]/(z^c - f) \text{ が UFD} \iff A \text{ が UFD}.$$

Corollary

k : 体.

$k[x_1, \cdots, x_n]/(x_1^{a_1} + \cdots + a_n^{a_n}) =: A$ とおく.

(i) $n \geq 4$, $\gcd(a_n, a_1 \cdots a_{n-1}) = 1$

(ii) $n = 3$, $\gcd(a_i, a_j) = 1$

のいずれかのときは A は UFD である.

∵

$n = 3$, $k[x, y, z]/(x^a + y^b + z^c) = \dfrac{k[x, y][z]}{(z^c - (-x^a - y^b))}$.