Certain monomial ideals whose numbers of generators of powers descend

神代さん (小山高専)

§1 Introduction

1-1 イデアルの(極小)生成系の個数について.

Question

R : comm. ring
$\cup$
I : an ideal

I を表すのに少なくとも何個必要か?

Example [Hilbertの基底定理]

K : a field

このとき, $K[X_1, \cdots, X_d]$ は Noetherian. (i.e.) 全てのイデアルは有限生成.

$\rightsquigarrow$ Λ : 無限集合

$\{f_\lambda(X_1, \cdots, X_d) = 0\}_{\lambda \in \Lambda}$ の解である.

$\Leftrightarrow \{g(X_1, \cdots, X_d) = 0\}_{g \in \underbrace{\langle f_\lambda \mid \lambda \in \Lambda \rangle}_{= \langle g_1, \cdots, g_\ell \rangle}}$ の解である.

$\Leftrightarrow \{g_i(X_1, \cdots, X_d) = 0\}_{i = 1, 2, \cdots, \ell}$ の解である.

1-2 Hilbert関数

R : Noetherian ring

I : ideal of R

① I の冪 I^n の生成系の個数 $\mu(I^n)$ を考えたい.

Example

$R = K[X_1, \cdots, X_d]$

$I = (X_1, \cdots, X_d)$ とすると, $I^n = (n次の単項式)$.

よって $\mu(I^n) = \binom{n+d-1}{d-1}$

Example

$R = K[X_1, \dots, X_{d+1}] / (X_{d+1}^2)$

$I = (X_1, \dots, X_{d+1}) \subset R$ とすると

$$\mu(I^n) = \begin{cases} d+1 & (n=1) \\ 2\binom{n+d-1}{d-1} - \binom{n+d-2}{d-2} & (n \geq 2) \end{cases}$$ //

そこで

$$\begin{array}{cccc} H_I(-) : & \mathbb{N}_{\geq 0} & \longrightarrow & \mathbb{N}_{\geq 0} \\ & n & \longmapsto & \mu(I^n) \end{array}$$

を Hilbert関数 という.

Fact

$n \gg 0$ で Hilbert関数は, ある有理多項式と一致する.

(i.e.) $\exists P(X) \in \mathbb{Q}[X]$ (s.t.) $H_I(n) = P(n)$ for $\forall n \gg 0$.

Question

多項式に一致する前はどうなっているか?

§2 Main result

Question [Herzog]

$S = K[X, Y]$ とする.

このとき, $n > 0$ に対して,

$\exists I$: monomial ideal (s.t.) $\mu(I) > \mu(I^2) > \cdots > \mu(I^n)$?

Remark

元々は1974年に Sally が 1次元整域の中で考えたのがはじまり。

[Eliahou - Herzog - Saem, 2018]

先のquestionで $\exists I$ (s.t.) $\mu(I) > \mu(I^2)$.

$\forall I$ with $\mu(I) \geq 6$, $\mu(I^2) \geq 9$

[Gasanova '20]

$\forall n>0$, $\exists I$ (s.t.) $\mu(I) > \mu(I^n)$.

Thm [Abdolmaleki - K '21]

$\forall n>0$, $\exists I$ (s.t.) $\mu(I) > \mu(I^2) > \cdots > \mu(I^n)$. であり, n以降 は Hilbert多項式と一致する.

実際に構成した例を $n=5$ で考える.

$$I = (X^{72}, Y^{72})\cdot(X^{432}, Y^{432}) + X^{162}Y^{378}(X^{18}, Y^{18})^2$$

$$+ X^{228}\cdot Y^{318}(X^{12}, Y^{12})^4 + X^{296}Y^{254}(X^8, Y^8)^7$$

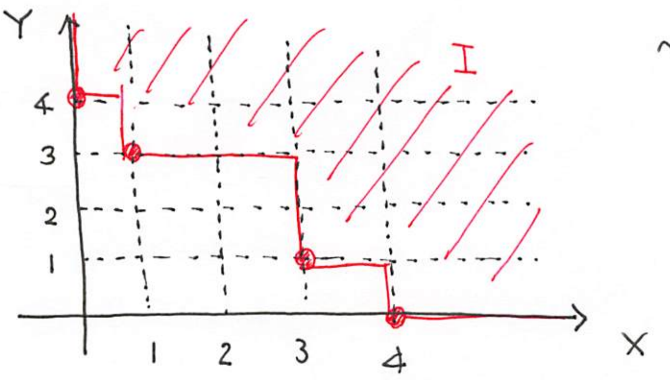
$$+ X^{362}\cdot Y^{184}(X^2, Y^2)^{34}$$

$\rightsquigarrow$ $\mu(I)=55$, $\mu(I^2)=41$, $\mu(I^3)=40$, $\mu(I^4)=37$, $\mu(I^5)=36$,

$\mu(I^6)=43$, ...

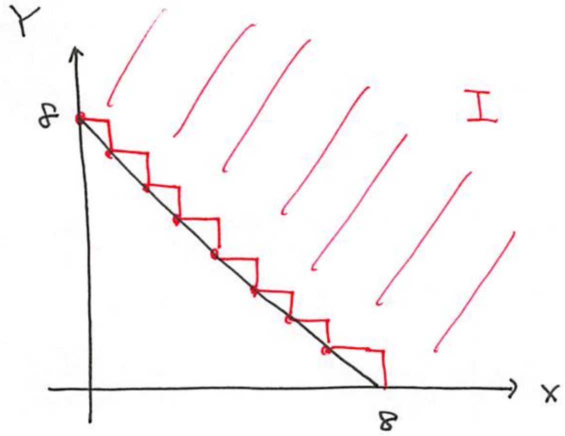
▨ $S=K[X,Y]$ での $\mu(I)$ の計算例.

$I=(X^4, X^3Y, XY^3, Y^4)$ とする.



$\rightsquigarrow$ $\mu(I) = 4$

$$I^2 = \begin{pmatrix} (X^4)^2, & X^4(X^3Y) & X^4\cdot(XY^3), & X^4Y^4 \\ & (X^3Y)^2 & (X^3Y)(XY^3), & (X^3Y)Y^4 \\ & & (XY^3)^2 & (XY^3)Y^4 \\ & & & (Y^4)^2 \end{pmatrix}$$



$\rightsquigarrow \quad \mu(I^2) = 9.$

//

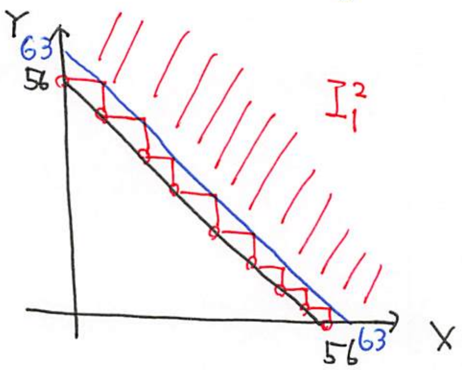
■ 構成のアイデア.

$$I = \underbrace{(X^7, Y^7)\cdot(X^{21}, Y^{21})}_{= I_1} + \underbrace{X^{15}Y^{15}(X, Y)^5}_{= I_2}$$ とすると

$$\rightsquigarrow \quad I^2 = I_1^2 + \underline{I_1 I_2} + I_2^2$$

deg 63 deg 70

$$I_1^2 = (X^7, Y^7)^8$$



$\rightsquigarrow \quad I_1^2 = I^2$

//

Question

どのようなHilbert funct.が存在するか?

ⓐ $\forall n > 0,\ \forall d_1, \dots, d_{n-1} \in \{+, -\}$.

$\exists ? I$: monomial ideal (s.t.)
$$\begin{cases} \cdot\ \mathrm{Sign}\left(\mu(I^{k+1}) - \mu(I^k)\right) = d_k & \text{for } 1 \le \forall k \le n-1 \\ \cdot\ H_I(k) = P_I(k) & \text{for } \forall k \ge n. \end{cases}$$