Super Lie groups over a complete field　高橋さん（筑波大）

$\Bbbk$: a field, $\mathrm{char}(\Bbbk) \neq 2$.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[d, "f"] \\ W \end{tikzcd} \iff V \xrightarrow{f} W \text{ in } \mathrm{Vect}(\Bbbk)$$

$$VW \iff V \otimes_{\Bbbk} W$$

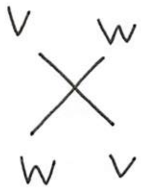
$$\begin{tikzcd} V \arrow[d, "f"'] & W \arrow[d, "g"] \\ V' & W' \end{tikzcd} \iff \begin{tikzcd} V \otimes_{\Bbbk} W \arrow[d, "f \otimes g"] \\ V' \otimes_{\Bbbk} W' \end{tikzcd}$$

$$\iff \begin{tikzcd} A \otimes_{\Bbbk} A \arrow[d, "\text{multi.}"] \\ A \end{tikzcd}$$

ベクトル空間の圏 Vect $\longrightarrow$ Super vector sp の圏 SVect

- Ob(Vect) = ベクトル空間 V
- mor(Vect) = $\left\{ \begin{tikzcd} V \arrow[d] \\ W \end{tikzcd} \right\}$
- tensor $V \otimes W$
- unit $\Bbbk$.

- Symmetry



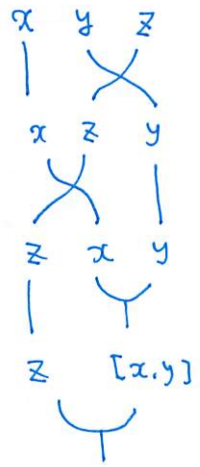
$v \otimes w \longmapsto w \otimes v$.

- $\mathrm{Ob}(\mathrm{Svect}) = \{ V_0 \oplus V_1 \mid \mathbb{Z}_2\text{-graded} \}$
- $\mathrm{mor}(\mathrm{Svect}) = \{ \mathbb{Z}_2\text{-graded linear maps} \}$
- unit $= \Bbbk \oplus 0$
- super sym.

$$v \otimes w \longmapsto (-1)^{|v||w|}\, w \otimes v, \text{ where } |v| = \begin{cases} 0 & v \in V_0 \\ 1 & v \in V_1. \end{cases}$$

Example

Jacobi identity $[x, [y,z]] + \underbrace{[y, [z,x]]} + [z, [x,y]] = 0$.



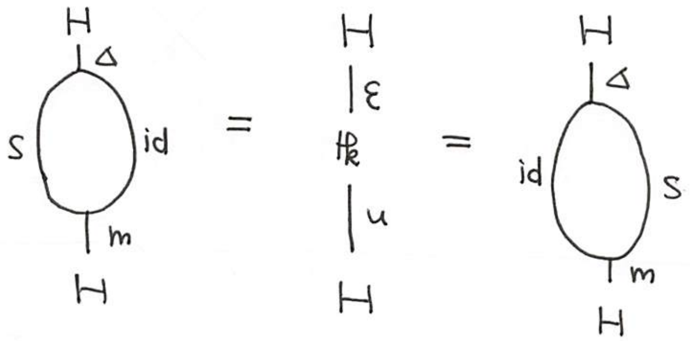
$[z, [x,y]] \rightsquigarrow (-1)^{|y||z|}(-1)^{|x||z|}[z, [x,y]]$.

$\mathrm{Vect}(\Bbbk) \rightsquigarrow \mathrm{SVect}(\Bbbk)$

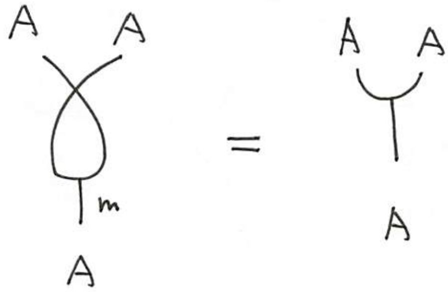
$\rightsquigarrow$ Super Jacobi identity is defined.

- Super Hopf alg.

$$\Bbbk \underset{\varepsilon}{\overset{u}{\rightleftarrows}} H \underset{\Delta}{\overset{m}{\leftrightarrows}} H \otimes H, \quad S : H \to H$$



- supper comm.



$(-1)^{|a||b|} ba = ab$

$\because A_1 \subset \sqrt{0}$.

Example

$Z := Z_1$: purely odd super vector space

$\rightsquigarrow \Lambda(Z)$: super comm. super alg.

Theorem [Deligne '02]

標数 0 の代数閉体上のある条件をみたす対称テンソル圏は，あるスーパー代数群上の加群圏として実現される.

Super scheme

幾何的見地による定義：

$A = A_0 \oplus A_1$: s. comm. s. alg.

- アフィンスーパースキーム $\mathrm{Spec}\, A$
- 底空間 $\mathrm{Spec}\, A_0$
- 開基 $D(x) = \{ \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, A_0 \mid x \notin \mathfrak{p} \}$, $x \in A_0$
- 構造層 $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\, A}(D(x)) = A \otimes_{A_0} (A_0)_x$

関手的見地による定義：

F : k-関手 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $F : (\mathrm{SAlg}) \longrightarrow (\mathcal{S}et)$

アフィンスーパースキームは表現可能な k-関手

$$\mathrm{Sp}A : R \longmapsto \mathrm{SAlg}(A, R)$$

スーパースキームはアフィンスーパースキームの貼り合わせ.

Theorem [Masuoka − Zubkov, '11]

(関手的スーパースキームの圏) $\approx$ (幾何的スーパースキームの圏) cat. eq.

$$\mathrm{Mor}(\mathrm{Spec}(-), X) \longleftarrow\!\!\!| \quad X$$

■ 代数群 スキーム.

G: 代数群 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $G : (\mathrm{Alg}) \longrightarrow (\mathrm{Grp})$ なる表現可能な関手であり,
$G = \mathrm{Alg}(A, -)$ のとき A が有限生成なものをいう.

幾何的には, A が Hopf alg. のときに $\mathrm{Spec}\, A$ が代数群.

$$\mathrm{Spec}\, A = G$$

$$\Bbbk \xleftarrow{\varepsilon} A \overset{S}{\circlearrowleft} \xrightarrow{\Delta} A \otimes A \overset{\text{対応}}{\longleftrightarrow} \{*\} \longrightarrow G \overset{-1}{\circlearrowleft} \xleftarrow{m} G \times G$$

Example

一般線型群 $GL_n : (\mathrm{Alg}) \longrightarrow (\mathrm{Grp})$, $R \longmapsto GL_n(R)$, $\quad A = \Bbbk[x_{ij}, \frac{1}{\det X}]_{1 \le i, j \le n}$.

■ Super object に付随する object

・s. alg $A = A_0 \oplus A_1$ に付随する alg は $A/(A_1) =: \overline{A}$

・s. scheme $X = \bigcup_{i \in I} \mathrm{Spec}\, A_i$ に付随する scheme は $\bigcup_{i \in I} \mathrm{Spec}\, \overline{A}_i =: \overline{X}$.

Example

スーパー代数群

$$GL(n|m) : (\mathrm{sAlg}) \longrightarrow (\mathrm{Grp})$$

$$\underset{n\text{次元}}{A = A_0} \oplus \underset{m\text{次元}}{A_1} \longmapsto \left\{ \left(\begin{array}{c|c} \boxed{x_{ij}}_{n\times n} & p_{il} \\ \hline q_{kj} & \boxed{y_{kl}}_{m\times m} \end{array} \right) ,\ \begin{array}{l} x_{ij}, y_{kl} \in A_0 \\ p_{il}, q_{kj} \in A_1 \end{array} \middle|\ \text{可逆} \right\}$$

$$A = \Bbbk[x_{ij}, y_{kl}, \frac{1}{\det X}, \frac{1}{\det Y}] \otimes \Lambda(p_{il}, q_{kj})$$

Theorem [Masuoka '05]

A : s.comm. s. Hopf. alg. $\Longrightarrow$ $A \simeq \overline{A} \otimes \Lambda(W)$, where $W = A_1 / A_0 \cdot \underbrace{\ker(A \xrightarrow{\varepsilon} \Bbbk)|_{A_1}}_{= A_1^+}$

as s.Hopf alg.

?

$A_1 = 0$ (もしくは $W=0$) のときは ? $A \simeq 0$?

▨ スーパー代数群に関する問題

(存在はわかっているが、幾何的性質はわかりにくい。)

Question [Brundan '06]

スーパー代数群 G とその閉部分スーパー群 H に対して G/H がいくつかの仮定を満たすとき、G に関する結果を残している。

$$G \times H \rightrightarrows G \longrightarrow G/H \quad \text{in s. scheme}$$

Example

$$(H\text{-SMod}) \approx (\text{q-coh-}G\text{-}\mathcal{O}_{G/H}\text{-SMod})$$

G-equiv な $\mathcal{O}_{G/H}$-スーパー加群

仮定

- $\overline{G/H} = \overline{G}/\overline{H}$
- $G \longrightarrow G/H$: faithful, flat, fin. presented.

▨ スーパー代数群の商 (幾何的)

G: スーパー代数群

H: スーパー閉部分群

$G = \operatorname{Spec} A \hookleftarrow H = \operatorname{Spec}(B) \rightsquigarrow A \twoheadrightarrow B$ as s. Hopf alg.

これに対して

$\overline{G} = \operatorname{Spec} \overline{A} \hookleftarrow \overline{H} = \operatorname{Spec}(\overline{B})$

$\rightsquigarrow \overline{\pi} : \overline{G} \longrightarrow \overline{G}/\overline{H}$: affine

affine open U $\quad$ U affine open

$\overline{\pi}^{-1}(U) \dashrightarrow U$

$|G| = |\overline{G}|$ より $\overline{\pi}^{-1}(U) \underset{\text{open}}{\subset} G$

このとき

$$\pi^{-1}(U) \times H \rightrightarrows \pi^{-1}(U) \longrightarrow \pi^{-1}(U)/H$$

を考えたい.

$$\exists \underbrace{(X, \mathcal{O}_X)}_{\text{right } H\text{-equiv.}} \xrightarrow{\sim} (\pi^{-1}(U), \mathcal{O}_G|_{\pi^{-1}(U)}) \subset G \quad \text{as s. scheme}.$$

$$\rightsquigarrow \quad X/H := Y_U \simeq \mathcal{O}_G(\pi^{-1}(U))^H$$

そこで $|\overline{G}/\overline{H}|$ 上で Y_U を貼り合わせる. これが $(G/H, \mathcal{O}_{G/H})$ である.

Ref

Geometric construction of quotients G/H in super symmetry.