「有限群の一様分解とその一様閉シャッフルへの応用」　SP: 品川さん ①

有限群の一様分解.

Definition

G : fin. group

$H_1, \cdots, H_m \subseteq G$.

$\vec{H} := (H_1, \cdots, H_m)$ が G の uniform decomposition

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \#\{(h_1, \cdots, h_m) \in \vec{H} \mid h_1 \cdots h_m = g\} = \frac{|H_1| \cdots |H_m|}{|G|} \quad \text{for } {}^\forall g \in G$$

$\Leftrightarrow$ $G = H_1 H_2 \cdots H_m$ かつ (multiset) として重複度が一定.

特に, すべての i で $H_i \leq G$ のとき, $\vec{H}$ を G の uniform group decomposition

H_i : 巡回群のとき $\vec{H}$ を G の uniform cyclic group decomposition.

Example

1) $G = \mathfrak{S}_3$, $\vec{H} = \langle (1,2,3) \rangle$, $\langle (2,3) \rangle$) は $\mathfrak{S}_3$ の cyclic decomposition.

Remark

$G \leq \mathfrak{S}_n$ as permutation group

$\vec{H}$ が G の uniform・decomp. (group / cyclic) $\Leftrightarrow$ (shuffle, G) は一様シャッフルの列 (group / cyclic)

(shuffle H_m) $\cdots$ (shuffle, H_1)

と等価.

Conjecture

任意の有限群は cyclic decomposition をもつ.

Theorem

① 可解群は cyclic. decomp. をもつ

② 有限群は cyclic decomp. をもつ $\Leftrightarrow$ simple group は cyclic decomp. をもつ.

Lemma

G : fin. group

$N \trianglelefteq G$, $\pi : G \twoheadrightarrow G/N$.

$(H_1, \cdots, H_m)$: G/N の gp. decomp.

$\hat{H}_i := \pi^{-1}(H_i)$

このとき, $(\hat{H}_1, \cdots, \hat{H}_m, N)$ は G の group decomp.

Corollary

G, N, π : 上と同じ.

$(H_1, \dots, H_m)$: G/N の cyclic decomp.
$(N_1, \dots, N_k)$: N の cyclic decomp.

$\hat{H}_i := \pi^{-1}(H_i)$ とおく.

このとき $(\hat{H}_1, \dots, \hat{H}_m, N_1, \dots, N_k)$ は G の cyclic decomp.

Summary

以下の群は cyclic decomp. をもつ群.

- G : solvable
- $\mathfrak{S}_n$ $\left(\vec{H} = (\langle (1,2,\dots,n) \rangle, \langle (1,2,\dots,n-1) \rangle, \dots, \langle (1\,2) \rangle) \right)$
- A_n
- Sporadic simple

  M_{11}, M_{12}, M_{22}, M_{23}, M_{24}

  J_1, J_2
- Lie type

  $PSL_2(q)$ for $q > 3$

  $PSL_3(q)$ for $q \equiv 1 \mod 3$.