2022年 3月5日(土) 〜 3月6日(日)

情報数理セミナー (第2回)

「When are trace ideals finite ?」　sp：神代さん (小山高専)

Notation

R : comm. Noether ring

M : fin. gen. R-module

$(-)^* := \mathrm{Hom}_R(-, R)$

Definition 1

M の トレースイデアル を

$$\mathrm{tr}_R(M) = \sum_{f \in M^*} \mathrm{Im}(f) \subset R$$

で定める.

Observation 2

$$\begin{tikzcd}
(f, x) \in M^* \times M \arrow[r, "\otimes"] \arrow[d, "\text{bilinear}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M^* \otimes_R M \arrow[dl, dashed, "\exists 1 \ \text{evaluation map}"] \\
f(x) \quad R &
\end{tikzcd}$$

Fact 3

- $\mathrm{tr}_R(M)_p \simeq \mathrm{tr}_R(M_p)$ for any $p \in \mathrm{Spec}\, R$
- $\mathrm{tr}_R(M \oplus N) = \mathrm{tr}_R(M) + \mathrm{tr}_R(N)$
- R : local ring

  $R \mathbin{\langle\!\oplus} M \iff \mathrm{tr}_R(M) = R$

∵

⇒》 自明

⇐》 $\mathrm{tr}_R(M) = R$ とすれば $\exists f_i \in M^*, \exists x_i \in M$ で

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) = 1$$

R は local なので $\exists i$ (s.t.) $f_i(x_i) \notin \mathfrak{m}$: maximal ideal of R.

∴ $f_i : M \longrightarrow R$, $x_i \longmapsto f_i(x_i)$ は全射で, R は projective なので $R \mathbin{\langle\!\oplus} M$.

//

Definition 4

I : ideal in R.

I が トレースイデアル とは, ある $M \in \operatorname{mod} R$ (s.t.) $I = \operatorname{tr}_R(M)$.
R の トレースイデアル で 零 でないもの 全体 を $T(R)$ とおく.

Question 5

R はいつ有限個のトレースイデアルをもつか?. ← I, J : trace ideals
このとき
$I \simeq J \Rightarrow I = J$.

$$\begin{pmatrix} \text{trace ideals} \\ \text{の分類} \end{pmatrix} \subset \begin{pmatrix} \text{ideal} \\ \text{の分類} \end{pmatrix} \subset \begin{pmatrix} \text{modules} \\ \text{の分類} \end{pmatrix}$$

Fact 6

$(R, \mathfrak{m}, k)$: 1-dim + いろいろな仮定

TFAE

(1) $\#\{\text{ind. CM modul}\}/\simeq \ < \infty$

(2) $\#\{\text{ideals}\}/\simeq \ < \infty$

Theorem 7 [K]

$(R, \mathfrak{m})$: Noether local ring with finitely many trace ideals

$\Rightarrow$ Either (a) kr-dim $R = 1$ & $R/H^0_{\mathfrak{m}}(R)$ is 1-dim ring + 色々な条件.

(b) R is Artin. (つまり kr-dim$R = 0$)

(reduced complete CM local
$\overline{R}$: integral closure が fin. gen. as R-module)

以下, 1次元について考える.
また, R は curve singularity とする. つまり,

・ $k \subset R \subset k[[t]]$ ($= \overline{R}$: integral closure)
k : 無限体, $R \subset k[[t]]$: finite length.

とする.

例 $k[[t^3, t^5, t^4 + \alpha t^7]]$ ($\alpha \in k$)

Example 8

(1) $R = k[[t^3, t^4, t^5]] \rightsquigarrow T(R) = \{(t^3, t^4, t^5),\ R\}$

(2) $R = k[[t^4, t^5, t^6]] \rightsquigarrow T(R) = \{(t^8, t^9, t^{10}, t^{11}),\ (t^6, t^8, t^9),\ (t^5, t^6, t^8),\ (t^4, t^5, t^6),\ R\} \cup \{(t^4 + \alpha t^5, t^6) \mid \alpha \in k\}$. □

Fact 9

(a) [Herzog - Hibi - Stamate]

$\forall I \in T(R)$ に対して, I は $R : k[[t]] := \{a \in R \mid a\, k[[t]] \subset R\}$ を含む.

(b) [Goto - K - Isobe]

$B(R) = \{S \mid R \subset \underset{\text{ring}}{S} \subset k[[t]]\}$ とすれば, $T(R) \xleftrightarrow{1:1} B(R)$ が R : Gorenstain で成り立つ.

($B(R) \longrightarrow T(R)$ はいつでも存在する)

R : Gorenstain $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ext}_R^{\gg 0}(R/m, R)$

[Kunz]

• $k[[t^3, t^4, t^5]]$

degree:
$$\begin{matrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \\ & \vdots & \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{matrix} \cdots & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \\ \cdots & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & -1 & -2 & \cdots \end{matrix}$$

こういう風に並べたときに, "穴" がなければ Gorenstain.
今の場合は「1」が穴なので, Gorenstain ではない.

• $k[[t^4, t^5, t^6]]$

degree:
$$\begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 & 11 \\ & \vdots & & \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{matrix} \cdots & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \cdots \\ \cdots & 11 & 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & -1 & -2 & \cdots \end{matrix}$$

穴がないので Gorenstain.

(Fact9) より (Ex8 (1)) では $R : k[[t]] = (t^3, t^4, t^5)$: maximal ideal.

(Ex8 (2)) では $B(R)$ を計算して

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
 & k[[t]] \arrow[d, phantom, "\cup"] & \\
 & k[[t^2, t^3]] \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
k[[t^2 + \alpha t^3, t^4]] \arrow[dr, dash] & & k[[t^3, t^4, t^5]] \arrow[dl, dash] \\
 & k[[t^4, t^5, t^6, t^7]] \arrow[d, dash] & \\
 & R. &
\end{tikzcd}$$

Theorem 10 [Kobayashi - K in preparation]

R : curve sing / infinite field $\Bbbk$.

IFAE

(a) $\# T(R) < \infty$

(b) $T(R) = \{$ integrally closed ideals containing $R : \Bbbk[[t]] \}$

$\{ X \in R \mid X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_n = 0,\ a_i \in I^i \}$

今の場合は ◎ 次以上で ○ がつくもので R に入っている元全体

$= \{ I_0, I_1, I_2, \cdots, I_n \}$ 有限集合.

(c) $I_i I_{i+2} = q_i I_{i+2}$ for $1 \leq {}^\forall i \leq n-2$.

ただし, q_i は ある(すべての) i番目の ○ がついているところ.

更に

$$R = \sum_{\substack{a_0 < a_1 < \cdots \\ a_0 = 0}} \Bbbk t^{a_i}$$

である. つまり, R は maximal ideal で生成されている.

(d) $a_j + a_{i+1} - a_i \in \{ a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots \}$ for $1 \leq {}^\forall i \leq n-2$, $i+2 \leq {}^\forall j \leq n$.

ただし, $n = \ell_R(R / R : \Bbbk[[t]])$

Example 11

$R = \Bbbk[[t^{11}, t^{14}, t^{18}, t^{20}, t^{21}, t^{23}, t^{24}, t^{26}, t^{30}]] \rightsquigarrow \# T(R) < \infty$.

Application

$\# T(R) < \infty \implies \# \{ \text{reflexive ideal} \} < \infty$

$\# \{ \text{reflexive mod} \} = \# \{ M \in \Omega CM(R) \} < \infty$