

2022年3月5日(土) ~ 3月6日(日)



情報数理論セミナー (第2回)

「When are trace ideals finite?」 sp: 神代さん (小山高専)

Notation

R : comm. Noether ring

M : fin. gen. R -module

$(-)^* := \text{Hom}_R(-, R)$

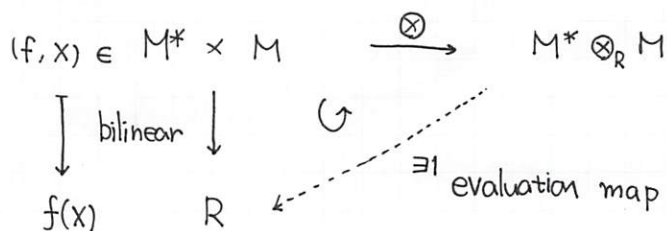
Definition 1

M の **トレースイデアル** を

$$\text{tr}_R(M) = \sum_{f \in M^*} \text{Im}(f) \subset R$$

と定める.

Observation 2



Fact 3

- $\text{tr}_R(M)_p \cong \text{tr}_R(M_p)$ for any $p \in \text{Spec } R$
- $\text{tr}_R(M \oplus N) = \text{tr}_R(M) + \text{tr}_R(N)$
- R : local ring
 $R \llcorner M \iff \text{tr}_R(M) = R$

☺
 \Rightarrow) 自明

\Leftarrow) $\text{tr}_R(M) = R$ とすれば $\exists f_i \in M^*, \exists x_i \in M$ ぞ

$$\sum_{i=1}^n f_i(x_i) = 1$$

R は local なのぞ \exists \mathfrak{m} (s.t.) $f_i(x_i) \notin \mathfrak{m}$: maximal ideal of R .

☺ $f_i: M \rightarrow R$ は全射ぞ. R は projective なのぞ $R \llcorner M$.
 $x_i \mapsto f_i(x_i)$



Example 8

(1) $R = \mathbb{k}[t^3, t^4, t^5] \rightsquigarrow T(R) = \{(t^3, t^4, t^5), R\}$

(2) $R = \mathbb{k}[t^4, t^5, t^6] \rightsquigarrow T(R) = \{(t^8, t^9, t^{10}, t^{11}), (t^6, t^8, t^9), (t^5, t^6, t^8), (t^4, t^5, t^6), R\} \cup \{(t^4 + \alpha t^5, t^6) \mid \alpha \in \mathbb{k}\}$.

□

Fact 9

(a) [Herzog - Hibi - Stamate]

$\forall I \in T(R)$ に対して, I は $R: \mathbb{k}[t] := \{a \in R \mid a \mathbb{k}[t] \subset R\}$ を含む.

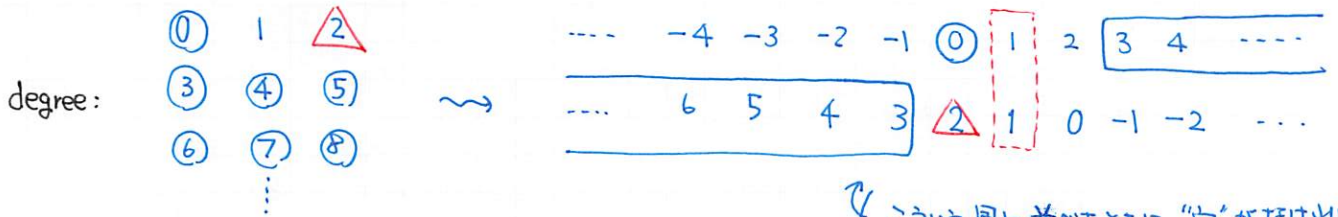
(b) [Goto - K - Isobe]

$B(R) = \{S \mid R \subset S \subset \mathbb{k}[t]\}$ とすれば, $T(R) \xleftrightarrow{1:1} B(R)$ が $R: \text{Gorenstein}$ を成り立つ.
($B(R) \hookrightarrow T(R)$ は $1:1$ とも存在する)

$R: \text{Gorenstein} \iff \text{Ext}_R^{\geq 0}(R/m, R)$

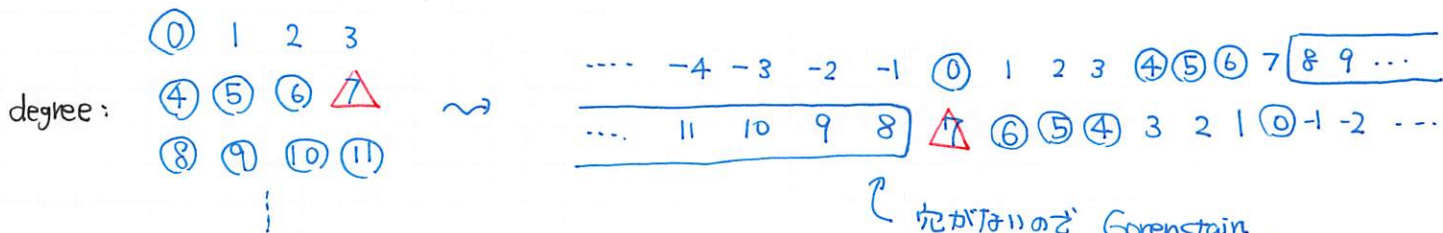
[Kunz]

• $\mathbb{k}[t^3, t^4, t^5]$



↑
このように並べたときに, "穴" がなければ Gorenstein.
今の場合は "1" が穴なので, Gorenstein ではない.

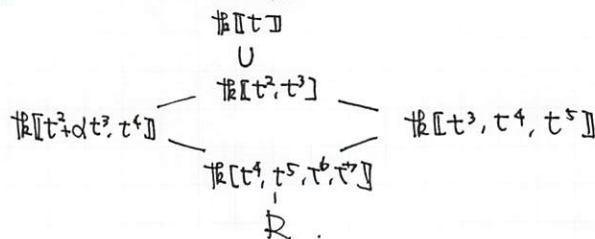
• $\mathbb{k}[t^4, t^5, t^6]$



↑
穴がないので Gorenstein.

(Fact 9) ♪' (Ex 8 (1)) では $R: \mathbb{k}[t] = (t^3, t^4, t^5) : \text{maximal ideal}$.

(Ex 8 (2)) では $B(R)$ を計算して



Theorem 10 [Kobayashi - K in preparation]

R : curve sing / infinite field \mathbb{k} .

IFAE

(a) $\# T(R) < \infty$

(b) $T(R) = \{ \text{integrally closed ideals containing } R: \mathbb{k}[[t]] \}$

$$\{ X \in R \mid X^n + a_1 X^{n-1} + \dots + a_n = 0, a_i \in I^i \}$$

今の場合は \odot 次以上で \circ がつくものを R に加えている全体

$$= \{ I_0, I_1, I_2, \dots, I_n \}$$

有限集合.

(c) $I_i I_{i+2} = \mathfrak{q}_i I_{i+2}$ for $1 \leq \forall i \leq n-2$.

ただし, \mathfrak{q}_i は i 番目の \circ がついているとこ.

更に

$$R = \sum_{\substack{a_0 < a_1 < \dots \\ 0}} \mathbb{k} t^{a_i}$$

である. つまり, R は maximal ideal で生成されている.

(d) $a_i + a_{i+1} - a_i \in \{ a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \}$ for $1 \leq \forall i \leq n-2, i+2 \leq \forall j \leq n$.

ただし, $n = \dim_{\mathbb{k}} (R/\mathbb{k}[[t]])$

Example 11

$$R = \mathbb{k}[[t^{11}, t^{14}, t^{18}, t^{20}, t^{21}, t^{23}, t^{24}, t^{26}, t^{30}]] \rightsquigarrow \# T(R) < \infty.$$

Application

$$\# T(R) < \infty \implies \# \{ \text{reflexive ideal} \} < \infty$$

⋮

$$\# \{ \text{reflexive mod} \} = \# \{ M \in \Omega CM(R) \} < \infty$$