「Graded filtrations and ideals of reduction number two」 sp: 神代さん 10月23日.

§1 Background

§2 Tools

§3 Graded filtrations

§4 ideals of reduction number two

§1

□ Hilbert function

① Observation

$P = k[X_1, \dots, X_d]$

$P_n := \mathrm{Span}_k \{ X_1^{\alpha_1} \cdots X_d^{\alpha_d} \mid \alpha_1 + \cdots + \alpha_d = n \}$

このとき

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N}_0 & \longrightarrow & \mathbb{N}_0 \\ n & \longmapsto & \dim_k P_n = \binom{n+d-1}{d-1} \end{array}$$

$\overbrace{\bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc\ \cdots\ \bigcirc}^{n}$ nコの○の間に

$\underbrace{|\ \ |\ \ |\ \cdots\ |}_{d}$ dコの | を入れる組み合わせ.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N}_0 & \longrightarrow & \mathbb{N}_0 \\ n & \longmapsto & \dim_k (P/(X_d^3))_n = 2\binom{n+d-2}{d-2} - \binom{n+d-3}{d-3} \end{array}$$

一般に $R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$ を graded Noetherian ring (s.t.) R_0: Artin local ring

$\ell_{R_0}(M_n) < \infty$ のために必要.

$M = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} M_n$ を fin. gen graded R-module of Kr-dim$(M) = s > 0$

に対して $\exists\, e_0(M), \dots, e_{s-1}(M) \in \mathbb{Z}$ で

$$\ell_{R_0}(M_n) = e_0(M)\binom{n+s-1}{s-1} - e_1(M)\binom{n+s-2}{s-2} + \cdots + (-1)^s e_{s-1}(M) \quad \text{for } \forall n \gg 0$$

R_0-module としての組成列の長さ

とできる. ここで

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N}_0 & \longrightarrow & \mathbb{N}_0 \\ n & \longmapsto & \ell_{R_0}(M_n) \end{array}$$

を M の Hilbert function と呼ぶ.

② A : commutative ring

I : Aの イデアル　（より一般に A-module M に対して）

このとき

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N}_0 & \longrightarrow & \mathbb{N}_0 \\ n & \longmapsto & \ell_A(I^n/I^{n+1}) \longleftarrow \ell_A(I^nM/I^{n+1}M) \end{array}$$

慣習的に

$$n \longmapsto \ell_A(A/I^{n+1}) = \sum_i \ell(I^i/I^{i+1})$$

と考えることが多い.

$$\left(\begin{array}{l} A \\ \mid \\ I \\ \mid \\ I^2 \\ \mid \\ \vdots \\ I^n \\ \mid \\ \vdots \end{array} \quad \text{総和} \right)$$

§2 Tools

以下，(A, m) : CM local ring　（or $A = k[X_1, \dots, X_d]$）

depth A = Kr-dim A

I : m-primary ideal（ $I \ni X_1^\ell, \dots, X_d^\ell$ for $\forall \ell \gg 0$ ）

Definition

$J \subseteq I$ をイデアルとする. これが I の reduction とは，ある $n \geq 0$ で　$I^{n+1} = JI^n$ とできるときをいう.

Fact

① $J \subseteq I$ を Iの reduction とすれば $e_0(I) = e_0(J)$

② A/m : infinite field $\Rightarrow$ $^\forall I$: m-primary ideal，$^\exists Q$: par. ideal

(s.t.) $Q \subseteq I$: reduction

とできて，特に $e_0(I) = e_0(Q) = \ell(A/Q)$

Question

$e_1(I)$ は ??

□ Sally modules

- Q : parametor ideal (s.t.) $Q \subseteq I$: reduction

Definition

$A[Qt] := A \oplus \bigoplus_{n\geq 1} Q^n t^n \subset A[It]$ は有限域拡大であることに注意する.

このとき

$$S := IA[It] / IA[Qt] \in \mathrm{Mod}\ A[Qt]$$

↖ 次数付き加群.

を Sally 加群という.

Fact

$$\ell(A/I^{n+1}) = e_0(I)\binom{n+d}{d} - (e_0(I) - \ell(A/I))\binom{n+d-1}{d-1} - \ell(S_n) \quad \text{for } \forall n \geq 0$$

§3 Omit

~~Theorem~~

§4 Main theorem

Settings :
- (A, m) : CM local ring with kr-dim ≥ 2
- I : m-primary (i.e. $\sqrt{I} = m$)
- A/m : infinite field
- $Q \subseteq I$: par. & reduction

Definition

$\mathrm{red}_Q I := \min\{ n \geq 0 \mid I^{n+1} = QI^n \}$: the reduction number

Fact

① $\mathrm{red}_Q I = 0$ ($\Leftrightarrow I = Q$) のとき

$$G(I) = \bigoplus_{n\geq 0} I^n / I^{n+1}$$

は CM 環である.

② 一般に $\ell(A/I) \geq e_0(I) - e_1(I)$ が成立する.

また, $\mathrm{red}_Q I = 1$ ($\Leftrightarrow I^2 = QI \Leftrightarrow S = 0$) と $\ell(A/I) = e_0(I) - e_1(I)$ と同値.

このとき $G(I)$ は CM 環である.

Remark

- $\mathrm{red}_Q I$ は Q の取り方に依存する．
- $\mathrm{red}_Q I = 2$ であったとしても depth $G(I) = 0$ となる例は多く存在する．

Theorem [K]

$\mathrm{red}_Q I = 2$ ならば

$$\ell(A/I) \geq e_0(I) - e_1(I) + e_2(I)$$

が成立する． また，等号成立は

$$\operatorname{depth} G(I) \geq \text{kr-}\dim(A) - 1$$

のときである．