

§1 Background

§2 Tools

§3 Graded filtrations

§4 ideals of reduction number two

§1

□ Hilbert function

① Observation

$$P = \mathbb{k}[X_1, \dots, X_d]$$

$$P_n := \text{Span}_{\mathbb{k}} \{ X_1^{\alpha_1} \dots X_d^{\alpha_d} \mid \alpha_1 + \dots + \alpha_d = n \}$$

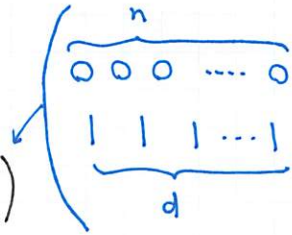
このとき

$$\mathbb{N}_0 \xrightarrow{\quad} \mathbb{N}_0$$

$$n \xrightarrow{\quad} \dim_{\mathbb{k}} P_n = \binom{n+d-1}{d-1}$$

$$\mathbb{N}_0 \xrightarrow{\quad} \mathbb{N}_0$$

$$n \xrightarrow{\quad} \dim_{\mathbb{k}} (P/(X_j))_n = 2 \binom{n+d-2}{d-2} - \binom{n+d-3}{d-3}$$



nつの0の間に  
d-1の1を入れる  
組み合わせ.

$l_{R_0}(M_n) < \infty$   
← のために必要.

一般に  $R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n \in$  graded Noetherian ring (s.t.)  $R_0$ : Artin local ring

$M = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} M_n \in$  fin. gen graded  $R$ -module of  $\text{Kr-dim}(M) = s > 0$

に対して  $\exists e_0(M), \dots, e_{s-1}(M) \in \mathbb{Z}$  だ

$$l_{R_0}(M_n) = e_0(M) \binom{n+s-1}{s-1} - e_1(M) \binom{n+s-2}{s-2} + \dots + (-1)^s e_{s-1}(M)$$

for  $\forall n \gg 0$

$l_{R_0}(M_n)$   $R_0$ -moduleとしての組成列の長さ

とできる. ここの

$$\mathbb{N}_0 \xrightarrow{\quad} \mathbb{N}_0$$

$$n \xrightarrow{\quad} l_{R_0}(M_n)$$

$\in M$  の Hilbert function と呼ぶ.

②  $A$  : commutative ring

$I$  :  $A$  のイデアル (より一般に  $A$ -module  $M$  に対して)

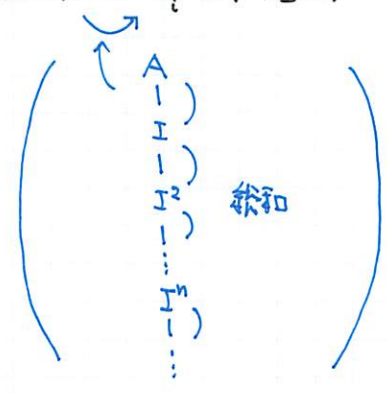
このとき

$$\begin{array}{ccc}
 N_0 & \longrightarrow & N_0 \\
 n & \longmapsto & l_A(I^n/I^{n+1}) \longleftarrow l_A(I^n M/I^{n+1} M)
 \end{array}$$

慣習的に

$$n \longmapsto l_A(A/I^{n+1}) = \sum_i l(I^i/I^{i+1})$$

と考えることがあり.



### §2 Tools

$$\text{depth } A = \text{Kr-dim } A$$

以下,  $(A, \mathfrak{m})$  : CM local ring (or:  $A = \mathbb{k}[X_1, \dots, X_d]$ )

$I$  :  $\mathfrak{m}$ -primary ideal ( $I \ni x_1^l, \dots, x_d^l$  for  $\forall l \gg 0$ )

### Definition

$J \subseteq I$  をイデアルとする.  $J$  が  $I$  の reduction とは, ある  $n \geq 0$  に対して  $I^{n+1} = JI^n$  とできることをいう.

### Fact

①  $J \subseteq I$  が  $I$  の reduction とすれば  $e_0(I) = e_0(J)$

②  $A/\mathfrak{m}$  : infinite field  $\Rightarrow \forall I$  :  $\mathfrak{m}$ -primary ideal,  $\exists Q$  : par. ideal

(s.t.)  $Q \subseteq I$  : reduction

とでき, 特に  $e_0(I) = e_0(Q) = l(A/Q)$

### Question

$e_1(I)$  は??

□ Sally modules

•  $Q$  : parameter ideal (s.t.)  $Q \subseteq I$  : reduction

Definition

$A[Qt] := A \oplus \bigoplus_{n \geq 1} Q^n t^n \subset A[It]$  は有限生成環であることに注意する.

このとき

$S := IA[It] / IA[Qt] \in \text{Mod } A[Qt]$   
↑ 次数付き加群.

を **Sally 加群** という.

Fact

$l(A/I^{n+1}) = e_0(I) \binom{n+d}{d} - (e_0(I) - l(A/I)) \binom{n+d-1}{d-1} - l(S_n)$  for  $\forall n \geq 0$

§3 Omit

~~Theorem~~

§4 Main theorem

- Settings :
- $(A, m)$  : CM local ring with  $\text{kr-dim} \geq 2$
  - $I$  :  $m$ -primary (i.e.  $\sqrt{I} = m$ )
  - $A/m$  : infinite field
  - $Q \subseteq I$  : par. & reduction

Definition

$\text{red}_Q I := \min \{ n \geq 0 \mid I^{n+1} = QI^n \}$  : the reduction number

Fact

①  $\text{red}_Q I = 0$  ( $\Leftrightarrow I = Q$ ) のとき

$$G(I) = \bigoplus_{n \geq 0} I^n / I^{n+1}$$

は CM 環である.

② 一般に  $l(A/I) \geq e_0(I) - e_1(I)$  が成立する.

また,  $\text{red}_Q I = 1$  ( $\Leftrightarrow I^2 = QI \Leftrightarrow s = 0$ ) と  $l(A/I) = e_0(I) - e_1(I)$  と同値.

このとき  $G(I)$  は CM 環である.

### Remark

- $\text{red}_Q I$  は  $Q$  の取り方に依存する.
- $\text{red}_Q I = 2$  であるとしても  $\text{depth } G(I) = 0$  とする例は多く存在する.

### Theorem [K]

$\text{red}_Q I = 2$  ならば

$$\ell(A/I) \geq e_0(I) - e_1(I) + e_2(I)$$

が成立する. また, 等号成立は

$$\text{depth } G(I) \geq k - \dim(A) - 1$$

のときである.