2021年 10月23日(土)
情報数理セミナー 「A family of strongly invariant algebras」
sp: 長峰さん (小山高専)

—— × —— × ——

Notation.

- a ring = a commutative ring with 1.
- an affine $\Bbbk$-domain = an integral domain, fin. gen / $\Bbbk$: a field.
- $A^{[n]}$ = the polynomial ring / A : a ring

§1 : Introduction

Cancellation probrem

$\Bbbk$: a field ← 標数等の仮定しない.

A, B : aff. $\Bbbk$-domains

このとき, $A^{[1]} \simeq B^{[1]} \Rightarrow A \simeq B$ か ?

換言すれば, X, Y が aff van / $\Bbbk$ に対して $X \times \mathbb{A}^1 \simeq Y \times \mathbb{A}^1 \Rightarrow X \simeq Y$ か?

($X = \mathrm{Spec}\, A$, $\mathbb{A}^1 = \mathrm{Spec}\, \Bbbk[t]$ として $X \times \mathbb{A}^1 = \mathrm{Spec}\,(A \otimes_{\Bbbk} \Bbbk[t])$ という状況)

Known - results

- dim = 1 …… YES. (Abhyankar - Eakin - Heinzer '72)
- dim ≧ 1 …… No.
  - The 1st counter example : (Danielewski '89)

    $A_n := \mathbb{C}[x, y, z] / (x^n z - y^2 + y) \quad (n \geq 1)$

    $\rightsquigarrow A_n^{[1]} \simeq A_m^{[1]}$ $(m \geq 2)$ だが, $A_1 \not\simeq A_m$
  - Higher cases : (Dubouloz, 2005)

Question

いつ Cancellation probrem は 成立するか ?

Today : Strongly invariant algebras を考察する.

Definition

A : a ring
$n \geq 1$

$\mathcal{S}(A, n) := \{ B : \text{a ring} \mid A^{[n]} \simeq B^{[n]} \}$

(i) A が n-invariant $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\forall B \in \mathcal{S}(A,n)$ に対して $A \simeq B$.

(ii) A が Strongly n-invariant $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\forall B \in \mathcal{S}(A,n)$ with $\varphi : A^{[n]} \xrightarrow{\sim} B^{[n]}$ に対して $\varphi|_A : A \xrightarrow{\sim} B$.

($A^{[n]} \simeq B^{[n]}$ が $A \simeq B$ を誘導している.)

(iii) A が invariant (Strongly invariant) $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ A が任意の $n \geq 1$ で n-invariant. (strongly n-invariant)

Example

k : a field.

$A_n := k[x + y^n] \subseteq k[x, y]$ ($A_n \simeq k^{[1]}$) is Not strongly inv. But invariant.

☺

$A_n[y] = k[x, y] \xrightarrow{\varphi = id} k[x, y] = A_m[y]$ ($n \neq m$)

に対して,

$$\varphi(A_n) = k[x + y^n] \neq k[x + y^m] = A_m$$

だから A_n は strongly inv. ではない. □

Known results.

・[Abhyankar - Eakin - Heinzer '72.]

A : an aff. domain of $\mathrm{tr.deg}_k A = 1$.

⇝ ・A is an invariant → もし1次元なら Cancellation problem が成立.
・もし, $A \neq k^{[1]}$ ならば strongly inv.

・[Iitaka - Fujita '77]

$k = \overline{k}$, $\mathrm{char}(k) = 0$ なる aff k-dom. A に対して

$\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\overline{\kappa}(\mathrm{Spec} A \setminus \mathrm{Sing}(\mathrm{Spec} A))} \geq 0 \Rightarrow A$ は strongly. inv.

the logarithmic Kodaira dimension of X ($= \mathrm{Spec} A \setminus \mathrm{Sing}(\mathrm{Spec} A)$)

$\in$

$\{ -\infty, \underbrace{0, 1, 2, \cdots, \dim X}_{\text{strongly inv.}} \}$

$-\infty$: $\mathbb{A}^n$, $k[X_1, \cdots, X_n]$ など

§2 Main result :

$\Bbbk$: a field
$n \geq 1$.

$A = \Bbbk[X, Y_1, \cdots, Y_n] \quad (\simeq \Bbbk^{[n+1]})$

$T := X^m Y_1 \cdots Y_n - 1 \in A$

$$
\begin{aligned}
R(m,n) &:= A[U]/\langle UT-(X-1)\rangle \\
&= \Bbbk[X, Y_1, \cdots, Y_n, U]/\langle UT-(X-1)\rangle \\
&= \Bbbk[X, Y_1, \cdots, Y_n, \tfrac{X-1}{T}]
\end{aligned}
$$

Theorem [N]

(i) $R(m,n)$ は strongly inv. of dim $= n+1$

(ii) $R(m,n) \simeq R(r,s) \iff (m,n) = (r,s)$

更に次がわかる.

(iii) $R(m,n)$ は UFD で $R(m,n)^\times = \Bbbk^\times$

(iv) $\Bbbk = \overline{\Bbbk}$ で $m \geq 2$ であれば $\mathrm{Aut}(R(m,n)) = (\Bbbk^\times)^{n-1} \times \mathfrak{S}_n$

(v) $V(m,n) := \mathrm{Spec}(R(m,n) \otimes_\Bbbk \overline{\Bbbk})$ は smooth で $\bar{\kappa}(V(m,n)) \leq 0$.

特に $\mathrm{char}(\Bbbk) = 0$ 又は $n=1$ のときは $\bar{\kappa}(V(m,n)) = 0$ である. //

Remark

$R(m,1) = \Bbbk[x, y, \frac{x-1}{x^m y - 1}]$ は [Freudenburg - Kojima - N '19] にて

- $V_m := \mathrm{Spec}(R(m,1) \otimes_\Bbbk \overline{\Bbbk})$ は smooth で $\underbrace{R(m,1) \text{ は UFD}}_{\text{factorial}}$ で $\bar{\kappa} = 0$, $\underbrace{(R(m,1))^\times = k^\times}_{\text{trivial unit}}$ である.
- $V_m \not\cong V_n \ (m \neq n)$ である. ← ∞-cases

これは Gurjar - Miyanishi's classification '1988 で smooth - factorial surface with trivial unit が同型類で分類されていて, 2種類しかないことが発表されていたが, まちがっていることがわかった.

⇝ [Petka - Rażny, 2021] が完全な分類が与えられた.

§3 : Proof

A : an integral domain

Definition

① $\delta : A \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ is a degree function

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$
- $\delta(f) = -\infty \Leftrightarrow f = 0$
- $\delta(fg) = \delta(f) + \delta(g)$
- $\delta(f+g) \leq \max\{\delta(f), \delta(g)\}$.

② δ : a degree function is
- non-negative $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\delta(f) \geq 0$ for $\forall f \in A\setminus\{0\}$.
- trivial $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\delta(f) = 0$ for $\forall f \in A\setminus\{0\}$.

Lemma

$\delta : A \to \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$: a degree function

$A_0^\delta := \{f \in A \mid \delta(f) \leq 0\}$ は A の部分環である．もし δ が non-negative ならば，
$A^\times \subset A_0^\delta$.

(proof)

- $0 \in A_0^\delta$ は明らか．
- $\delta(1) = \delta(1 \cdot 1) = \delta(1) + \delta(1)$ $\therefore$ $\delta(1) = 0$. よって $1 \in A_0^\delta$.
- $f, g \in A_0^\delta$ とすれば，$\delta(fg) = \delta(f) + \delta(g) \leq 0$. よって $fg \in A_0^\delta$.
- $f \in A_0^\delta$ なら $\delta(-f) = \underbrace{\delta(-1)}_{=0} + \delta(f) = \delta(f)$. よって $-f \in A_0^\delta$.

これらより A_0^δ は A の部分環．

もし，δ が non-negative なら，$u \in A^\times$ に対して

$$0 = \delta(1) = \underbrace{\delta(u)}_{\geq 0} + \underbrace{\delta(u^{-1})}_{\geq 0}$$

$\therefore$ $\delta(u) = 0$ なので $u \in A_0^\delta$. □

Definition

$$\Delta^0(A) := \bigcap_{\delta:\text{non-neg}} A_0^{\delta} \quad \subset \quad ML(A) := \bigcap_{D:\text{locally nilp. der.}} A^D.$$

: the degree neutral invariant of A

Remark

A : k- domain $\Rightarrow$ $k \subset \Delta^0(A) \subset A$.

Theorem [FKN'19]

もし，$\Delta^0(A) = A$ ならば A は strongly inv. である．

Remark

- $\Delta^0(A) = A \iff A_0^{\delta} = A$ for $\forall \delta$: non-deg
  $\iff \delta(f) = 0$ for $\forall f \in A \setminus \{0\}$, $\forall \delta$: non-deg.
  $\iff \forall$ non-deg func. is trivial.

(proof of outline)

① $\varphi : A \xrightarrow{\sim} B \rightsquigarrow \varphi : \Delta^0(A) \xrightarrow{\sim} \Delta^0(B)$

② $\Delta^0(A) = A \rightsquigarrow \Delta^0(A^{[n]}) = A$ for $\forall n \geq 1$

③ $\Delta^0(A) = A$, $A^{[n]} \simeq B^{[n]} \rightsquigarrow \Delta^0(B) \simeq B$.

そこで $n \geq 1$, B, $\varphi : A^{[n]} \xrightarrow{\sim} B^{[n]}$ ととったときに ①より

$$\begin{array}{ccc} \varphi: \Delta^0(A^{[n]}) & \xrightarrow{\sim} & \Delta^0(B^{[n]}) \\ \| \text{②} & & \| \text{③,②} \\ A & & B \end{array}$$

∴ $\varphi|_A : A \xrightarrow{\sim} B$. よって A は strongly inv. □