「First obstruction to Hasse norm principle and norm one tori」 (j.w.t. Hoshi, Yamasaki)

sp: 金井さん

§1 Intro -HP and HNP-

§2 Known results

§3 Main results

§4 The HNP and norm one tori

§5 Obs (K/k)

§6 sketch of proof

メモ
k の "素イデアル"
$\Leftrightarrow$ $\overline{\mathbb{Z}} \cap k =: \mathcal{O}_k$ の素イデアル

§1

1.1 : Hasse principle (HP)

k : number field (NF) (i.e.) finite extension $/ \mathbb{Q}$

k_v: completion of k at a place v (i.e.) finite extension of $\mathbb{Q}_p$

ここで $k \hookrightarrow k_v$ があるので $k \hookrightarrow \prod_v k_v$ $(a \mapsto (a, a, \dots))$ がある.

$\rightsquigarrow$ For X/k : aff var $\underbrace{X(k)}_{k\text{-rational pt}} \subset \prod_v X(k_v)$.

よって

$$\underbrace{X(k) \neq \emptyset}_{\text{global}} \Rightarrow \underbrace{X(k_v) \neq \emptyset}_{\text{local}} \text{ for } \forall v.$$

Definition

X/k : aff. var.

HP holds for X/k $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $[X(k) \neq \emptyset \Leftrightarrow X(k_v) \neq \emptyset \text{ for } \forall v]$.

Theorem [Hasse - Minkowski '1921]

HP holds for quadratic forms $/ k$

3次の場合は HP をもたない反例がある [Selmer 1951]

$X = 3x^3 + 4y^3 + 5z^3 = 0 \ / \mathbb{Q}$ は $X(\mathbb{Q}_p) \neq \emptyset$ (p: prime or ∞) だが $X(\mathbb{Q}) = \emptyset$.

一般に n次形式 $(n \geq 3)$ に対する HP は難しい. (e.g. The theory of Brauer-Manin obstruction)

1.2 : Hasse "norm" principal.

- $\mathbb{A}_k := \{ (a_v) \in \prod_v k_v \mid v(a_v) \geq 0$ for almost all $v \}$: adel ring

  $\mathbb{A}_k^\times$: idele group of k

- L/k : fin ext. of NF

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[d, mapsto] & L^\times \arrow[r, hook] \arrow[d, "N_{L/k}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathbb{A}_L^\times \arrow[d, dashed] & \ni (x_w)_w \arrow[d, mapsto] \\
\prod\limits_{\sigma \in \frac{Gal(\overline{\mathbb{Q}}/k)}{Gal(\overline{\mathbb{Q}}/L)}} \sigma(a) \in & k^\times \arrow[r, hook] & \mathbb{A}_k^\times & \ni \prod\limits_{w|v} N_{L_w/k_v}(x_w)
\end{tikzcd}
$$

Definition

L/k : finite extension of NF.

$$\mathrm{Obs}(L/k) := \frac{k^\times \cap N_{L/k}(\mathbb{A}_L^\times)}{N_{L/k}(L^\times)}$$

local の 束ね合わせ

global

とする.

HNP holds for $L/k \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \mathrm{Obs}(L/k) = 0$

Remark

HNP holds for $L/k \overset{\text{iff}}{\Longleftrightarrow}$ HP holds for $N_{L/k}(t) = c$ for $\forall c \in k^\times$.

Theorem [Hasse's norm theorem 1931]

L/k : cyclic extension (i.e.) $Gal(L/k) \simeq C_n$: cyclic group.

$\Rightarrow \mathrm{Obs}(L/k) = 0$.

Example

① $\mathrm{Obs}(\mathbb{Q}(\sqrt{-39}, \sqrt{-3})/\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

② $\mathrm{Obs}(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{-1})/\mathbb{Q}) = 0$

} 両者 の ガロア群 は V_4 (klein four gp)

§2

- L/k : Galois extension

Theorem [Tate 1967]

$G = \mathrm{Gal}(L/k)$ とする．このとき

$$\mathrm{obs}(L/k) \simeq \ker\left(\hat{H}^3(G, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\text{res}} \bigoplus_{v \in V_k} \hat{H}^3(G_v, \mathbb{Z})\right)$$

付置全体

ここで

$$G_v := \{ \sigma \in G \mid \sigma(P_v) = P_v \}$$ the decomposition gp of G at v

である．

もし，$G \simeq C_n$ なら $\hat{H}^3(G, \mathbb{Z}) \simeq \hat{H}^1(G, \mathbb{Z}) = 0$ だから $\mathrm{Obs}(L/k) = 0$ が Tateの定理から従う．

また，もし $G \simeq V_4$ なら

$$\mathrm{obs}(L/k) = 0 \iff {}^{\exists} v \in V_k \ \text{(s.t.)}\ \underset{L_1}{G_v} \simeq V_4 \quad \text{——} \circledast$$

$\because$ $\hat{H}^3(V_4, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$．

Example

G_v : cyclic $\iff$ v : unramified

① $L_1 := \mathbb{Q}(\sqrt{-39}, \sqrt{-3}) = \mathbb{Q}({}^{\exists}\alpha)$ f_α : 最小多項式 $\quad D(f_\alpha) = \blacksquare\, D_{L_1}$

判別式 $\qquad 13^2 \cdot (-3)^2$

$\rightsquigarrow \mathrm{obs}(L_1/\mathbb{Q}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$． $\qquad p \mid D_{L_1} \iff p$: ramify

② $L_2 := \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{-1}) = \mathbb{Q}(\zeta_8) \longleftarrow D_{L_2} = 2^{\blacksquare}$

2 : totally ramify $\rightsquigarrow \# G_v = 4$

$\rightsquigarrow G_v \simeq V_4$

$\rightsquigarrow \mathrm{Obs}(L_2/\mathbb{Q}) = 0$ $\circledast$

K/k : non-Galois.

$$\begin{array}{c} {}^{\exists}L \ : \text{Galois closure} \\ | \\ K \\ | \\ k. \end{array}$$

- HNP holds for
  - $[K:k] = p$: prime [Bartels '81]
  - $[K:k] = n$: $\mathrm{Gal}(L/k) \simeq D_n$ [Bartels '81]
  - $[K:k] = n$: $\mathrm{Gal}(L/k) \simeq \mathfrak{S}_n$ [Voskresenkii - Kunyavskii]
  - $[K:k] = n$ $(n \geq 5)$: $\mathrm{Gal}(L/k) \simeq A_n$ [Macedo '2020] ← Gapが用いられている.

次の2つの定理が主結果の motivation である:

Theorem [Kunyavskii '1984]

$[K:k] = 4$, $G \simeq 4Tm$ $(1 \leq m \leq 5)$ ← transitive subgroup of $\mathfrak{S}_4$

このとき $\mathrm{obs}(K/k) = 0$ except for $4T_2 \simeq V_4$, $4T_4 \simeq A_4$

更に $G \simeq V_4$ or A_4 のとき

$$\left.\begin{array}{l} ① \ \mathrm{obs}(K/k) \leq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ ② \ \mathrm{obs}(K/k) = 0 \iff {}^{\exists} v \in V_k \ \text{(s.t.)} \ V_4 \leq G_v \end{array}\right\} (**)$$

Theorem [Dvakokhrust - Platonov '87]

$[K:k] = 6$, $G \simeq 6Tm$ $(1 \leq m \leq 16)$

このとき $\mathrm{obs}(K/k) = 0$ except for $6T_4 \simeq A_4$, $6T_{12} \simeq A_5$

であって $G \simeq A_4$ or A_5 のときは (**) が成立する.

§3 Main result

Theorem [Hoshi - K - Yamasaki]

$[K:k] = n \leq 15$, $G_n \simeq nTm$.

このとき $\mathrm{obs}(K/k) = 0$ exc. for Table 1

更に Table 1 のときの $\mathrm{obs}(K/k)$ は Table 2 のときになる.